Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

8. Übungsblatt für die Woche vom 6. bis 10. Mai 2019

AUFGABE 8.1 (Euklids Tangentenkonstruktion). Sei Γ ein Kreis mit Mittelpunkt M und A ein Punkt im Äußeren von Γ.

(a) Erkläre, warum die Strecke MA den Kreis Γ in einem Punkt B schneidet.
(b) Sei t die Tangente an Γ im Punkt B und bezeichne Γ' den Kreis mit Mittelpunkt M durch A. Erkläre, warum ein Schnittpunkt $C \in \Gamma' \cap t$ existiert.
(c) Erkläre, warum MC den Kreis Γ in einem Punkt D schneidet.
(d) Zeige, dass die Gerade durch A und D tangential an Γ ist.

Wie bekommen wir die zweite Tangente an Γ durch A?

AUFGABE 8.2 (Umkehrung des Satzes von Thales). Sei AB Durchmesser eines Kreises Γ. Weiters sei C ein Punkt, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige:

(a) Liegt C im Inneren von Γ, dann ist $\angle ACB$ stumpf.
(b) Liegt C auf Γ, dann ist $\angle ACB$ ein rechter Winkel.
(c) Liegt C im Äußeren von Γ, dann ist $\angle ACB$ spitz.

Hinweis: Bezeichne D den Schnittpunkt von Γ mit dem Radius durch C. Verwende den Satz vom Außenwinkel, um $\angle ACB$ und $\angle ADB$ zu vergleichen.

AUFGABE 8.3 (Neunpunktkreis auch Feuerbachkreis). Sei ABC ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Bezeichnen M_a, M_b, M_c die Mittelpunkte der drei Seiten, H_a, H_b, H_c die drei Höhenfußpunkte und N_a, N_b, N_c die Mittelpunkte der Höhenabschnitte HA, HB, HC. Zeige, dass die neun Punkte $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, N_a, N_b, N_c$ auf einem Kreis liegen. Zeige dazu der Reihe nach:

(a) Die Trägergeraden der drei Strecken AB, M_aM_b und N_aN_b sind parallel.
(b) Die Trägergeraden der drei Strecken CH_c, M_aN_b und M_bN_a sind parallel.
(c) $M_aM_bN_aN_b$ bildet ein Rechteck, d.h. ein Parallelogramm mit vier rechten Winkeln.
(d) $M_aM_cN_aN_c$ bildet ein Rechteck.
(e) Die sechs Punkte $M_a, M_b, M_c, N_a, N_b, N_c$ liegen auf dem Kreis mit Durchmesser M_aN_a.
(f) H_a liegt auch auf diesem Kreis.
(g) H_b und H_c liegen ebenfalls auf diesem Kreis.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 8.4 (Nachtrag zum Neunpunktkreis). Die Rechtecke im Beweis der vorangehenden Aufgabe können zu Strecken degenerieren.

(a) Gib ein Dreieck an, für das $C = H = H_a = H_b = N_c$, $M_a = N_b$ und $M_b = N_a$ gilt.
(b) Zeige, dass aber stets $M_a \neq M_b$, $N_a \neq N_b$ und $M_a \neq N_a$ gilt.
(c) Vervollständige den Beweis in der vorigen Aufgabe im Fall degenerierter Rechtecke.
(d) Gib ein Dreieck an, für das $H_a = M_a$ gilt.
(e) Erkläre, warum stets $H_a \neq M_b$ gilt.
(f) Kann H_a mit N_a zusammenfallen?

Aufgabe 8.5 (Winkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und D ein Punkt im Inneren der Seite BC. Zeige:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Sei E der Schnittpunkt von $g(A, B)$ mit der Parallelen zu $g(D, A)$ durch C. Zeige

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle AEC, \qquad \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACE, \qquad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AE|}$$

und verwende eine Charakterisierung gleichschenkeliger Dreiecke aus der Vorlesung.

Aufgabe 8.6 (Außenwinkelhalbierendensatz). Sei ABC ein Dreieck und seien D, F zwei Punkte mit $B * C * D$ und $B * A * F$. Zeige:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|DB|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$

Hinweis: Dies lässt sich analog zum Winkelhalbierendensatz beweisen.

Aufgabe 8.7 (Kreis des Apollonius). Seien A und B zwei verschiedene Punkte und $0 < \lambda \neq 1$. Zeige, dass die Menge

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\}$$

einen Kreis bildet und drücke seinen Radius durch λ und $\delta := |AB|$ aus.

Nimm zunächst $\lambda > 1$ an und gehe wie folgt vor:

(a) Erkläre, warum auf der Strecke AB genau ein Punkt C mit $|CA| = \lambda|CB|$ existiert und drücke $|CB|$ durch λ und δ aus.
(b) Erkläre, warum auf dem Strahl $A(B{>}$ genau ein Punkt D mit $|DA| = \lambda|DB|$ existiert und drücke $|DB|$ durch λ und δ aus.
(c) Erkläre, warum auf $g(A, B)$ keine weiteren Punkte X mit $|XA| = \lambda|XB|$ existieren.
(d) Drücke den Radius des Kreises Γ mit Durchmesser CD durch λ und δ aus.
(e) Sei X ein Punkt mit $|XA| = \lambda|XB|$, der nicht auf $g(A, B)$ liegt. Zeige der Reihe nach: Der Strahl $(XC{>}$ halbiert den Winkel $\angle AXB$; der Strahl $(XD{>}$ halbiert den Winkel $\angle BXF$, wobei $A * X * F$; der Winkel $\angle CXD$ ist ein rechter; und $X \in \Gamma$. Schließe daraus:

$$\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \subseteq \Gamma.$$

(f) Zeige $\Gamma' \cap \Gamma = \emptyset$, wobei Γ' den analogen Kreis für einen weiteren Parameter λ' mit $1 < \lambda' \neq \lambda$ bezeichnet.
(g) Verwende (f), um die umgekehrte Inklusion $\{X \in \mathcal{E} : |XA| = \lambda|XB|\} \supseteq \Gamma$ zu zeigen.

Welche Mengen erhalten wir in den Fällen $\lambda = 1$ und $0 < \lambda < 1$.