Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

9. Übungsblatt für die Woche vom 13. bis 17. Mai 2019

Aufgabe 9.1. (a) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.
(b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Zeige

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1.$$

Aufgabe 9.2 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

Aufgabe 9.3. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und sei O ein weiterer Punkt auf dieser Geraden, der verschieden von A, B und C ist. Zeige

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CO}{OA} = -1.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Absolutbeträge beider Seiten übereinstimmen und führe anschließend eine geeignete Fallunterscheidung durch, um auch das Vorzeichen zu überprüfen.

Aufgabe 9.4. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \| g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

Aufgabe 9.5 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B) \| g(A', B')$ und $g(B, C) \| g(B', C')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A)$ und $g(C', A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

Aufgabe 9.6 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B') \| g(B, A')$ und $g(B, C') \| g(C, B')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A')$ und $g(A, C')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 9.3.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 9.7 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a, H_b und H_c. Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

Aufgabe 9.8 (Inkreismittelpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Verwende den Winkelhalbierendensatz, siehe Aufgabe 8.5.

Aufgabe 9.9 (Odoms Konstruktion des goldenden Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A * B * C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende den Sehnensatz aus Aufgabe 7.3.

Aufgabe 9.10 (Goldenes Dreieck). Teile X die Strecke AB im goldenen Schnitt, d.h. X liege im Inneren von AB und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Sei C ein weiterer Punkt mit $|AB| = |AC|$ und $|BC| = |AX|$. Zeige, dass die Dreiecke ABC und CBX ähnlich sind und schließe daraus

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$$

sowie $5\sphericalangle CAB = 2R$ und $5\sphericalangle ABC = 4R$.