Zur Verfügung gestellt von:
Stefan Haller
UE Geometrie und lineare Algebra, SoSe 2019
LV-Nr.: 250163
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

Übungen zu Geometrie und Lineare Algebra für das Lehramt

zusammengestellt von Stefan Haller

Sommersemester 2019 (UE250163)

9. Übungsblatt für die Woche vom 13. bis 17. Mai 2019

Aufgabe 9.1. (a) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden mit Teilverhältnis $\frac{AB}{BC} = 3$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$, $\frac{CB}{BA}$, $\frac{AC}{CB}$ und $\frac{BA}{AC}$.
(b) Seien A, B, C drei verschiedene Punkte einer Geraden. Zeige

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1.$$

Aufgabe 9.2 (Goldener Schnitt). Sei AC eine Strecke und B ein Punkt im Inneren, der die Strecke im goldenen Schnitt teilt, d.h. es gelte $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$. Berechne die Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$ und $\frac{CA}{AB}$. Welche der Strecken AB und BC ist die längere?

Aufgabe 9.3. Seien A, B, C drei Punkte auf einer Geraden und sei O ein weiterer Punkt auf dieser Geraden, der verschieden von A, B und C ist. Zeige

$$\frac{AO}{OB} \cdot \frac{BO}{OC} \cdot \frac{CO}{OA} = -1.$$

Hinweis: Zeige zunächst, dass die Absolutbeträge beider Seiten übereinstimmen und führe anschließend eine geeignete Fallunterscheidung durch, um auch das Vorzeichen zu überprüfen.

Aufgabe 9.4. Sei AC eine Strecke und $p, q > 0$. Weiters seien A', C' auf verschiedenen Seiten von $g(A, C)$ so, dass $g(A, A') \| g(C, C')$, $|AA'| = p$ und $|CC'| = q$. Bezeichne B den Schnittpunkt von $g(A, C)$ und $g(A', C')$. Zeige $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Welches Teilverhältnis erhalten wir, wenn A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$ liegen?

Aufgabe 9.5 (Satz von Desargues). Seien a, b, c drei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, A' \in a \setminus \{O\}$, $B, B' \in b \setminus \{O\}$ und $C, C' \in c \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B) \| g(A', B')$ und $g(B, C) \| g(B', C')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A)$ und $g(C', A')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz.

Aufgabe 9.6 (Satz von Pappos). Seien g und g' zwei verschiedene Geraden, die sich in einem Punkt O schneiden. Weiters seien $A, B, C \in g \setminus \{O\}$ und $A', B', C' \in g' \setminus \{O\}$ so, dass $g(A, B') \| g(B, A')$ und $g(B, C') \| g(C, B')$. Zeige, dass dann auch $g(C, A')$ und $g(A, C')$ parallel sind. Hinweis: Verwende den orientierten Strahlensatz und Aufgabe 9.3.

Beispiele unter `http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/Geometrie.S2019.html`

Aufgabe 9.7 (Höhenschnittpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Sei ABC ein Dreieck und bezeichne die Fußpunkte der Höhen mit H_a, H_b und H_c. Zeige, dass die Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind und schließe $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Leite zwei weitere analoge Relationen her und verwende den Satz von Ceva.

Aufgabe 9.8 (Inkreismittelpunkt mittels Satz von Ceva). Zeige mit Hilfe des Satzes von Ceva, dass sich die drei Winkelsymmetralen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden. Hinweis: Verwende den Winkelhalbierendensatz, siehe Aufgabe 8.5.

Aufgabe 9.9 (Odoms Konstruktion des goldenden Schnitts). Seien A und B die Mittelpunkte zweier Seiten eines gleichseitigen Dreiecks, und bezeichne C jenen Schnittpunkt der Geraden $g(A,B)$ mit dem Umkreis des Dreiecks, für den $A * B * C$ gilt. Zeige, dass B die Strecke AC im goldenen Schnitt teilt, d.h. zeige, dass $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|CA|}{|AB|}$ gilt. Hinweis: Verwende den Sehnensatz aus Aufgabe 7.3.

Aufgabe 9.10 (Goldenes Dreieck). Teile X die Strecke AB im goldenen Schnitt, d.h. X liege im Inneren von AB und $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$. Sei C ein weiterer Punkt mit $|AB| = |AC|$ und $|BC| = |AX|$. Zeige, dass die Dreiecke ABC und CBX ähnlich sind und schließe daraus

$$\sphericalangle BCA = \sphericalangle ABC = 2\sphericalangle CAB$$

sowie $5\sphericalangle CAB = 2R$ und $5\sphericalangle ABC = 4R$.

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 9.1. a) Mit Lemma 2.1.8 erhalten wir sofort:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= 3, & \frac{BC}{CA} &= -\frac{1}{4}, & \frac{CA}{AB} &= -\frac{4}{3}, \\ \frac{CB}{BA} &= \frac{1}{3}, & \frac{AC}{CB} &= -4, & \frac{BA}{AC} &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

b) Setzen wir $x := \frac{AB}{BC}$, so ist $\frac{BC}{CA} = \frac{1}{-x-1}$ und $\frac{CA}{AB} = \frac{-x-1}{x}$ nach Lemma 2.1.8, also

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = x \cdot \frac{1}{-x-1} \cdot \frac{-x-1}{x} = 1.$$

Alternativ folgt für den Absolutbetrag zunächst

$$\left|\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB}\right| = \left|\frac{AB}{BC}\right| \cdot \left|\frac{BC}{CA}\right| \cdot \left|\frac{CA}{AB}\right| = \frac{|AB|}{|BC|} \cdot \frac{|BC|}{|CA|} \cdot \frac{|CA|}{|AB|} = 1.$$

Da genau einer der drei Punkte A, B, C zwischen den anderen beiden liegt, ist eines der Teilverhältnisse $\frac{AB}{BC}$, $\frac{BC}{CA}$, $\frac{CA}{AB}$ positiv und die anderen beiden negativ. Somit ist ihr Produkt positiv und wir erhalten erneut $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{BC}{CA} \cdot \frac{CA}{AB} = 1$.

Zu Aufgabe 9.2. Nach Voraussetzung ist $\frac{AB}{BC} = -\frac{CA}{AB}$, wobei das Vorzeichen aus $A*B*C$ folgt. Bezeichnet $x = \frac{AB}{BC}$ dann gilt $\frac{CA}{AB} = \frac{-x-1}{x}$ nach Lemma 2.1.8. Dies führt auf die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$, also $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Da $x > 1$, folgt $|AB| > |BC|$.

Zu Aufgabe 9.3. Offensichtlich gilt

$$\left|\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA}\right| = \left|\frac{AO}{OB}\right|\cdot\left|\frac{BO}{OC}\right|\cdot\left|\frac{CO}{OA}\right| = \frac{|AO|}{|OB|}\cdot\frac{|BO|}{|OC|}\cdot\frac{|CO|}{|OA|} = 1.$$

Um das Vorzeichen zu überprüfen, unterscheiden wir zwei Fälle: Liegen die Punkte A, B, C alle auf derselben Seite von O, dann sind die drei Teilverhältnisse $\frac{AO}{OB}$, $\frac{BO}{OC}$, $\frac{CO}{OA}$ alle negativ. Liegen die Punkte A, B, C nicht auf derselben Seite von O, dann sind sind zwei dieser Teilverhältnisse positiv und das dritte negativ. In jedem Fall ist ihr Produkt negativ. Wir erhalten daher

$$\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA} = -1.$$

Zu Aufgabe 9.4. Aus dem Satz vom Außenwinkel folgt $A \neq B \neq C$, vgl. Aufgabe 6.1. Mit dem Strahlensatz erhalten wir daher

$$\left|\frac{AB}{BC}\right| = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AA'|}{|CC'|} = \frac{p}{q}.$$

Aus dem orientierten Strahlensatz bekommen wir das Vorzeichen, $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B}{BC'} > 0$, denn B liegt zwischen A' und C'. Somit $\frac{AB}{BC} = \frac{p}{q}$. Alternativ lässt sich auch mit dem Satz vom Außenwinkel zeigen, dass B zwischen A und C liegen und daher $\frac{AB}{BC} > 0$ gelten muss.

Liegen A' und C' auf derselben Seite von $g(A, C)$, und ist $p \neq q$, erhalten wir analog $\frac{AB}{BC} = -\frac{p}{q}$. Beachte, dass die Geraden $g(A, C)$ und $g(A', C')$ genau dann parallel sind, wenn $ACC'A'$ ein Parallelogramm bildet und, dass dies wiederum genau dann der Fall ist, wenn $p = |AA'| = |CC'| = q$ gilt, vgl. Aufgabe 6.5 und Satz 1.5.10.

Zu Aufgabe 9.5. Da $g(A, B)\|g(A', B')$ und $g(B, C)\|g(B', C')$ folgt aus dem orientierten Strahlensatz $\frac{AO}{OA'} = \frac{BO}{OB'}$ und $\frac{BO}{OB'} = \frac{CO}{OC'}$. Somit auch $\frac{AO}{OA'} = \frac{CO}{OC'}$ und daher $g(C, A)\|g(C', A')$ wegen der umgekehrten Implikation im orientierten Strahlensatz.

Zu Aufgabe 9.6. Aus dem orientierten Strahlensatz folgt

$$\frac{AO}{OB} = \frac{B'O}{OA'} \qquad \text{und} \qquad \frac{BO}{OC} = \frac{C'O}{OB'}.$$

Aus Aufgabe 9.3 erhalten wir

$$\frac{AO}{OB}\cdot\frac{BO}{OC}\cdot\frac{CO}{OA} = -1 = \frac{C'O}{OB'}\cdot\frac{B'O}{OA'}\cdot\frac{A'O}{OC'}.$$

Kombination dieser Gleichungen liefert $\frac{CO}{OA} = \frac{A'O}{OC'}$. Nach der umgekehrten Implikation im orientierten Strahlensatz sind die Geraden $g(C, A')$ und $g(A, C')$ daher parallel.

Zu Aufgabe 9.7. O.B.d.A. nehmen wir an, dass keiner der Höhenfußpunkte mit einem Eckpunkt zusammenfällt. Ist $\angle CAB$ spitz, so stimmen $\angle H_bAB$ und $\angle H_cAC$ überein, andernfalls bilden sie Scheitelwinkel. In jedem Fall haben wir $\angle H_bAB \equiv \angle H_cAC$. Da die Winkel $\angle AH_bB$ und $\angle AH_cC$ beide rechte sind, folgt aus dem W:W:W Ähnlichkeitssatz, dass die beiden Dreiecke AH_bB und AH_cC ähnlich sind. Insbesondere erhalten wir $\frac{|AH_b|}{|AH_c|} = \frac{|AB|}{|AC|}$

und analog $\frac{|BH_c|}{|BH_a|} = \frac{|BC|}{|BA|}$ sowie $\frac{|CH_a|}{|CH_b|} = \frac{|CA|}{|CB|}$. Somit

$$\left|\frac{AH_b}{H_bC} \cdot \frac{BH_c}{H_cA} \cdot \frac{CH_a}{H_aB}\right| = \left|\frac{AH_b}{H_bC}\right| \cdot \left|\frac{BH_c}{H_cA}\right| \cdot \left|\frac{CH_a}{H_aB}\right| = \frac{|AH_b|}{|H_bC|} \cdot \frac{|BH_c|}{|H_cA|} \cdot \frac{|CH_a|}{|H_aB|}$$
$$= \frac{|AH_b|}{|AH_c|} \cdot \frac{|BH_c|}{|BH_a|} \cdot \frac{|CH_a|}{|CH_b|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|BC|}{|BA|} \cdot \frac{|CA|}{|CB|} = 1.$$

Ist das Dreieck ABC spitzwinkelig, so liegen alle drei Höhenfußpunkte auf den Seiten und die Teilverhältnisse $\frac{AH_b}{H_bC}$, $\frac{BH_c}{H_cA}$, $\frac{CH_a}{H_aB}$ sind daher alle positiv. Andernfalls liegen genau zwei Höhenfußpunkte außerhalb der Dreiecksseiten, also sind zwei dieser Teilverhältnisse negativ und das dritte positiv. In jedem Fall ist das Produkt der drei Teilverhältnisse positiv und wir erhalten

$$\frac{AH_b}{H_bC} \cdot \frac{BH_c}{H_cA} \cdot \frac{CH_a}{H_aB} = 1.$$

Nach dem Satz von Ceva sind die drei Höhen daher konkurrent.

Zu Aufgabe 9.8. Sei ABC ein Dreieck und bezeichnen W_a, W_b, W_c die Schnittpunkte der Winkelsymmetralen mit den gegenüberliegenden Seiten. Nach dem Winkelhalbierendensatz gilt $\frac{|W_bA|}{|W_bC|} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Wir erhalten das Teilverhältnis $\frac{AW_b}{W_bC} = \frac{|BA|}{|BC|}$, denn W_b liegt im Inneren der Seite AC. Analog folgt $\frac{BW_c}{W_cA} = \frac{|CB|}{|CA|}$ und $\frac{CW_a}{W_aB} = \frac{|AC|}{|AB|}$. Somit

$$\frac{AW_b}{W_bC} \cdot \frac{BW_c}{W_cA} \cdot \frac{CW_a}{W_aB} = \frac{|BA|}{|BC|} \cdot \frac{|CB|}{|CA|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} = 1.$$

Nach dem Satz von Ceva sind die drei Winkelsymmetralen daher konkurrent.

Zu Aufgabe 9.9. Bezeichne $a := |AB|$, $b := |BC|$ und $b' := |AC'|$, wobei C' den anderen Schnittpunkt der Geraden $g(A, B)$ mit dem Umkreis bezeichnet, für den $C' * A * B$ gilt. Aus dem Strahlensatz folgt, dass A und B von den benachbarten Dreieckspunkten Abstand a haben. Mit dem Sehnensatz erhalten wir

$$b(a + b') = a^2 = b'(a + b).$$

Daraus folgt zunächst $b = b'$ und dann $a^2 = b(a + b)$, also $a/b = (a + b)/a$ und $\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AC|}{|AB|}$.

Zu Aufgabe 9.10. Aus $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{|BA|}{|AX|}$ und $|BC| = |AX|$ folgt $\frac{|BC|}{|BX|} = \frac{|BA|}{|BC|}$. Nach dem S:W:S Ähnlichkeitssatz sind ABC und CBX ähnliche Dreiecke, denn $\angle ABC = \angle CBX$. Insbesondere erhalten wir $\sphericalangle XCB = \sphericalangle CAB$ und $\frac{|CX|}{|AC|} = \frac{|CB|}{|AB|}$, also $|CX| = |CB| = |AX|$ und daher $\sphericalangle ACX = \sphericalangle CAB$. Somit

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCA = \sphericalangle XCB + \sphericalangle ACX = 2\sphericalangle CAB.$$

Da die Winkelsumme im Dreieck $2R$ beträgt, folgt $5\sphericalangle CAB = 2R$ und dann $5\sphericalangle ABC = 4R$.