UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 1

Ab nun bearbeiten wir Aufgaben zum Stoff der VO *Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie* und alle Inhalte der StEOP-Phase (VO+UE+Workshops) werden prinzipiell als bekannt vorausgesetzt, auch wenn gelegentlich einzelne Aspekte wiederholt werden. Aus diesen zusammen mit dem wochenweise wachsenden Stoff der laufenden VO und den nummernweise davor liegenden UE-Aufgaben sind jeweils die Aufgaben für die UE-Einheiten der folgenden Woche(n) zu bearbeiten (d.h. Lösungsideen aus anderen Quellen müssen zumindest in dieses logische Gefüge eingepasst werden, wenn Sie die Reinschrift für eine konsistente Lösung machen).

Die gestellten Aufgaben sind nur als Minimum an Vorschlägen dafür aufzufassen, was zum Einüben und Verdauen des VO-Stoffes empfohlen wird. Für einen richtig guten Übungseffekt sollten Sie selbst regelmäßig deutlich mehr probieren. Als Quellen für zusätzliches Material eignen sich z.B. die einschlägigen Bücher von Kowalsky-Michler, Stoppel-Griese, G. Fischer, Zieschang, Jänich (hier insbesondere auch die Tests) und weitere Bücher, Skripten oder Online-Aufgabensammlungen nach Geschmack und Laune. Sie müssen dabei halt immer berücksichtigen, dass der Stoff eben teilweise in einer veränderten Reihenfolge aufgebaut wird. (Einige Aufgaben sind ja mit mehr Theorie im Hintergrund besonders rasch zu lösen, sind aber im spezifischen logischen Kontext eventuell absichtlich mit mehr Aufwand verbunden, also in gewisser Hinsicht „anders gemeint“.) Übrigens sind dieselben Aspekte ja auch beim Zusammenstellen dieser UE-Aufgaben relevant und die Quellenlage dazu ist sogar äußerst diffus (und zum Zeitpunkt dieses ersten Übungsblattes sowieso noch unbekannt): Ausgebeutet werden wahrscheinlich neben Waldmanns Lehrbuch und den bereits genannten Büchern diverse Aufgabensammlungen von KollegInnen, vielleicht auch noch weitere Bücher (über Lineare Algebra, Algebra, Mathematikkurse für Physik oder für technische Fächer) u.a. von H. Anton, Axler, Scheja-Storch, Koecher, Meyberg-Vachenauer, Wuest ... und darüberhinaus werden wohl auch die (wenigen) „selbsterfundenen“ UE-Aufgaben mit Sicherheit trotzdem schon mal woanders vorgekommen sein.

Schließlich gestehen wir Ihnen zu, im Laufe der UE und VO während fruchtbarer[1] Krisen so zu empfinden wie in der folgenden Beschreibung, die ich dem Vorspann des Buches *Stochastic Differential Equations* von Bernt Øksendal, Springer-Verlag, 5. Auflage 1998, entnommen habe (zur Quellenfrage siehe den *Quote Investigator* im World Wide Web):

> „We have not succeeded in answering all our problems. The answers we have found only serve to raise a whole set of new questions. In some ways we feel we are as confused as ever, but we believe we are confused on a higher level and about more important things.“

. . . .

Außerdem noch ein Geständnis: Wir weichen hier von einer Konvention der StEOP-VO (und auch von der DIN) ab, indem wir ab nun folgende Notation vereinbaren

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{und} \quad \mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

[1] Kein Tippfehler! Denn furchtbare Krisen wünscht Ihnen niemand, aber die fruchtbaren werden alle erfolgreichen Studentinnen und Studenten mit Sicherheit durchleben müssen.

Aufgaben zum Kapitel $\boxed{\text{A}}$ „Vorgeplänkel“ (bzw. zu Waldmanns Kapiteln 1 und 3)

$\boxed{\textbf{51}}$ Es sei $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $W_n := \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ für $n \in \mathbb{N}$ die Menge der (komplexen n-ten) *Einheitswurzeln* .

(a) Zeigen Sie — ohne die explizite Gestalt der Elemente von W_n zu verwenden — dass $W_n \subseteq S^1$ gilt und W_n mit der von $\mathbb{C}$ vererbten Multiplikation eine Untergruppe der kommutativen Gruppe $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ bildet.

(b) Geben Sie für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ die Elemente von W_n explizit in Polardarstellung an und machen Sie (grobe) Skizzen von W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6. Zeigen Sie, dass $(W_n, \cdot)$ isomorph zur Restklassengruppe $(\mathbb{Z}_n, +)$ ist.

$\boxed{\textbf{52}}$ Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^3$ jene Ebene, die die drei Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ enthält. Geben Sie für E sowohl eine Parameterdarstellung als auch eine gleichungsdefinierte Variante an.

$\boxed{\textbf{53}}$ Es sei $E_1 \subseteq \mathbb{R}^3$ die von $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $E_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ die von $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ aufgespannte Ebene durch den Punkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Weisen Sie mit Hilfe von Normalvektoren nach, dass E_1 und E_2 nicht parallel liegen, und bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

$\boxed{\textbf{54}}$ Es seien $m, n \in \mathbb{R}^3$ und $a := n \times m$. Zeigen Sie: m und n sind parallel $\iff a = 0$.

$\boxed{\textbf{55}}$ Wir betrachten das sogenannte *Spatprodukt*, d.h. die Abbildung $S\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$S(a, b, c) := \langle a, b \times c \rangle \qquad (a, b, c \in \mathbb{R}^3).$$

Die Zahl $S(a, b, c)$ lässt sich u.a. auf Grund der folgenden Eigenschaften als (orientiertes) Volumen des von a, b, c aufgespannten Parallelepipeds interpretieren. Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ stets gilt:

(a) $S(a, b, c) = 0$, falls zwei der Vektoren parallel sind;

(b) $S(\lambda a + \mu d, b, c) = \lambda S(a, b, c) + \mu S(d, b, c)$ und $S(a, c, b) = -S(a, b, c) = S(b, a, c)$.

$\boxed{\textbf{56}}$ Verwenden Sie eine Eigenschaft von S aus der vorigen Aufgabe sowie die Graßmann-Identität des Kreuzproduktes, um $\langle a \times b, c \times d \rangle$ ohne Rückgriff auf die Komponenten der Vektoren $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ zu berechnen. Leiten Sie daraus (ohne langwierige Komponentenrechnungen) die folgende bekannte Formel her, wobei γ der Winkel zwischen a und b ist:

$$\|a \times b\| = \|a\| \, \|b\| \sin \gamma.$$

$\boxed{\textbf{57}}$ (a) Führen Sie die Division mit Rest von $7x^7 + 5x^5 + 3x^3 + x$ durch $x^2 + 1$ aus.

(b) Erraten Sie eine ganzzahlige[2] Nullstelle von $3x^4 - 2x^3 + 3x - 2$ und dividieren Sie durch den entsprechenden Linearfaktor.

[2] Vielleicht kennen Sie oder wollen hierzu auch den sogenannten *Wurzelsatz von Vieta* nachschauen?