

66 Welche der folgenden Teilmengen von \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3 sind Teilräume? Begründen Sie Ihre Antworten und skizzieren Sie für die Aufgaben (a-f) die betreffenden Teilmengen des \mathbb{R}^2 :

- (a) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0\}$,
- (b) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$,
- (c) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$,
- (d) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 0 \text{ und } x_1 - x_2 = 0\}$,
- (e) $\{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2^2 = 0\}$,
- (f) $\{(x_1, x_2) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R} : x_1 = 3\lambda, x_2 = -2\lambda\}$,
- (g) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0\}$,
- (h) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_3 = 0 \text{ und } x_2^4 = 0\}$.

67 Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}[x]$ sind Teilräume? (Begründungen!)

- (a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq n\}$,
- (b) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(17) = 0\}$,
- (c) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid p(0) = 1\}$,
- (d) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 4\}$,
- (e) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) = 0\}$,
- (f) $\{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) \leq 5 \text{ und } p(1) = 0\}$.

68 Seien $b_1 = x^2$, $b_2 = -2x^2 + 2x$, $b_3 = x^2 - 2x + 1$ in $\mathbb{R}[x]$ gegeben.

- (a) Was ergibt $\text{span}\{b_1, b_2, b_3\}$?
- (b) Ist $\{b_1, b_2, b_3\}$ linear unabhängig?

69 Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$ linear unabhängig im \mathbb{R}^3 ?

- 70** (a) Finden Sie vier Vektoren im \mathbb{R}^3 , so dass je drei von ihnen linear unabhängig sind.
- (b) Sei p eine Primzahl. Ist $\{1, \sqrt{p}\}$ linear unabhängig in \mathbb{R} als Vektorraum über \mathbb{Q} ?

71 Begründen Sie: (a) Wir können \mathbb{C}^n als Vektorraum über \mathbb{C} oder auch über \mathbb{R} auffassen. (b) Sind Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^n$ linear unabhängig über \mathbb{C} , dann auch über \mathbb{R} . (Was ist jeweils die Dimension von \mathbb{C}^n als Vektorraum über \mathbb{C} bzw. \mathbb{R} ?)

(c) Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ linear abhängig über \mathbb{C} sind, aber linear unabhängig über \mathbb{R} .

72 Zeigen Sie, dass die Menge der Monome $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis für $\mathbb{K}[x]$ ist.

73 Es sei $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist B ein Erzeugendensystem für \mathbb{R}^4 ? Kann es Erzeugendensystem für einen dreidimensionalen Teilraum des \mathbb{R}^4 sein? Ist es überhaupt ein Erzeugendensystem für irgendeinen Teilraum des \mathbb{R}^4 ? Wenn ja, welche Dimension hat der?

74 Kann die Menge $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

zu einer Basis des \mathbb{R}^4 ergänzt werden? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, wie?

Freiwillige Zusatzaufgabe Es sei $\{p_1, p_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ die Menge der Primzahlen.

Ist die Menge $\{\log(p_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$ linear unabhängig in \mathbb{R} als Vektorraum über \mathbb{Q} ?

Zur Verfügung gestellt von:
 Günther Hörmann
 UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
 WiSe 2018/19
 LV-Nr.: 250014
 Fakultät für Mathematik, Universität Wien
 Danke!