UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 6

$\boxed{\text{Keine Aufgabe für Tafeldiskussionen}}$ Ich gebe hier nicht kunterbunte Matrizen in diversen Größen an, gespickt mit würzigen Einträgen (d.h. Komponenten, Koeffizienten), um Sie dann zu fragen, welche davon man in was für einer Reihenfolge multiplizieren oder addieren darf/kann/soll ... aber berechnen Sie zum Aufwärmen (am besten mal für sich allein) das Produkt $A \cdot B$ für die folgenden Matrizen A, B (und vergleichen dann):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{90}}$ Bestimmen Sie Kern, Bild und Rang der folgenden linearen Abbildungen:

(a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot x,$

(b) $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \psi(x) := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot x.$

$\boxed{\textbf{91}}$ (a) Geben Sie zu den linearen Abbildungen aus Aufgaben $\boxed{82}$ und $\boxed{83}$(a) jeweils die Matrix bezüglich der Standardbasen an.

(b) Geben Sie zu den linearen Abbildungen aus Aufgabe $\boxed{83}$(c-d) jeweils die Matrix bezüglich selbst gewählter geordneter Basen an.

$\boxed{\textbf{92}}$ Berechnen Sie für die folgenden Matrizen A jeweils alle Potenzen A^n für $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{93}}$ (a) Erinnern Sie sich an (oder besorgen Sie sich) die Additionstheoreme für Winkelfunktionen und berechnen Sie das folgende Matrixprodukt, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig sind:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

(b) Geben Sie eine Regel für die Multiplikation zweier Diagonalmatrizen[1] an, das heißt, berechnen Sie folgendes Matrixprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

[1] also quadratische Matrizen, bei denen alle Einträge außerhalb der Hauptdiagonale 0 sind

94 (a) Was können Sie über das Produkt $\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$ zweier sogenannter Blockmatrizen sagen? (Das Symbol $*$ bezeichnet hier beliebige, i.A. verschiedene Einträge.)

(b) Betrachten Sie für $A \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{K}$ die Matrixprodukte

$$B := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot A \quad \text{und} \quad C := A \cdot \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu_m \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, warum B einfach aus A entsteht, indem jeweils die i-te Zeile mit λ_i multipliziert wird ($i = 1, \ldots, n$). Was lässt sich im Vergleich dazu über C sagen?

95 Sei V jener Teilraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der von den beiden Funktionen g_1, g_2 erzeugt wird, wobei $g_1(t) := e^{2t} \sin 3t$ und $g_2(t) := e^{2t} \cos 3t$ für $t \in \mathbb{R}$ gilt. Zeigen Sie zunächst, dass die beiden Funktionen linear unabhängig sind und somit (g_1, g_2) eine geordnete Basis B von V ist. Bestimmen Sie die Matrix $_B[\varphi]_B$ der linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(f) := f'' - 2f$.

96 Ist die folgende Matrix invertierbar? Wenn ja, dann bestimmen Sie die Inverse[2]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

97 Bestimmen Sie für φ aus Aufgabe 86 die Matrixdarstellungen $_B[\varphi]_B$ und $_B[\varphi]_C$ bzgl. der geordneten Basen $B = (1, x, x^2, x^3)$ und $C = (x - 1, 2x, x^3 - x^2, x^2 + x^3)$.

98 Es sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ bzgl. der Standardbasen gegeben. Zeigen Sie zunächst, dass $A = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ bzw. $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ geordnete Basen in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ definieren. Bestimmen Sie dann die Matrixdarstellung $_B[\varphi]_A$ sowie die Koordinaten des Bildvektors von $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ bzgl. B.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie
WiSe 2018/19
LV-Nr.: 250014
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

[2] Und machen am besten auch die Probe!