UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 7

„Quer durch den Gemüsegarten“ (Kapitel B-D bzw. Waldmann 4.1 bis 5.5)

99 Zeigen Sie, dass die Menge $H := \{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe der $GL_3(\mathbb{R})$ bildet, die ebenfalls nicht kommutativ ist. Bestimmen Sie dann das sogenannte Zentrum $Z := \{A \in H \mid \forall B \in H \colon AB = BA\}$ der Gruppe H und zeigen Sie, dass Z eine kommutative Untergruppe ist. [H ist die (universelle Überlagerung der) Heisenberggruppe.]

100 Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Ist $w \in V$ und $v_1 + w, \ldots, v_m + w$ linear abhängig, dann gilt $w \in \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_m\}$. Gilt auch die Umkehrung?

101 (a) Gibt es eine Basis von $P_3 := \{p \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p) \leq 3\}$, sodass keines der Basispolynome den Grad 2 hat?

(b) Es sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann

$$v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, v_4$$

ebenfalls eine Basis von V ist.

102 Sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 = 3x_2, x_3 = 7x_4\}$.

(a) Geben Sie eine Basis für U an.

(b) Erweitern Sie die Basis aus (a) zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

(c) Geben Sie einen Teilraum W von $\mathbb{R}^5$ an, sodass $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$ gilt.

103 (a) Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $v_1, \ldots, v_m \in V$ linear unabhängig. Zeigen Sie: Für jedes $w \in V$ gilt $\dim \operatorname{span}\{v_1 + w, \ldots, v_m + w\} \geq m - 1$.

(b) Seien $p_0, p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{K}[x]$ mit $\deg(p_j) = j$ für $j = 0, \ldots, m$. Zeigen Sie, dass dann $p_0, p_1, \ldots, p_m$ eine Basis des Teilraums $P_m := \{p \in \mathbb{K}[x] \mid \deg(p) \leq m\}$ ist.

104 (a) Es seien U und W zwei vierdimensionale Teilräume von $\mathbb{C}^6$. Zeigen Sie, dass $U \cap W$ zumindest zwei Vektoren enthalten muss, die nicht parallel sind.

(b) Es seien U und W zwei fünfdimensionale Teilräume des $\mathbb{R}^9$. Zeigen Sie, dass $U \cap W$ einen Vektor ungleich 0 enthalten muss.

(c) Es seien U und W Teilräume des $\mathbb{R}^8$ mit $\dim U = 3$, $\dim W = 5$ und $\mathbb{R}^8 = U + W$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{R}^8 = U \oplus W$ gilt.

105 Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$:

(a) Seien $m \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_m$ paarweise verschiedene Vektoren aus V, weiters setzen wir $A := \{v_1, \ldots, v_m\}$. Betrachten Sie die lineare Abbildung $T \colon \mathbb{K}^m \to V$ mit $T(x_1, \ldots, x_m) = x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m$. Unter welchen Bedingung an A ist T injektiv bzw. surjektiv?

(b) Sei nun W ein weiterer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\Phi \in L(V, W)$. Zeigen Sie, dass es einen Teilraum U von V mit den Eigenschaften $U \cap \ker \Phi = \{0\}$ und $\operatorname{im} \Phi = \{\Phi u \mid u \in U\}$ gibt.