UE Einführung Lineare Algebra und Geometrie WS 18

Blatt 8

$\boxed{\textbf{106}}$ Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum.

(a) Seien $\varphi, \psi \colon V \to \mathbb{K}$ linear und $\varphi, \psi \neq 0$. Zeigen Sie: $\ker \varphi = \ker \psi \iff \exists c \in \mathbb{K} \colon \psi = c\varphi$.

(b) Seien $S, T \in L(V)$. Zeigen Sie: ST invertierbar $\iff$ S und T invertierbar.
In diesem Fall ist $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

$\boxed{\textbf{107}}$ Die *Spur* (englisch: trace) einer quadratischen Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit Eintragungen a_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ ist definiert durch $\operatorname{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ (Summe der Diagonaleintragungen).
Zeigen Sie: (a) $\operatorname{tr} \colon M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ist linear, (b) $\forall A, B \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

$\boxed{\textbf{108}}$ (a) Berechnen Sie die Basiswechsel von A nach B und umgekehrt für die geordneten Basen $A = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\0\end{pmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ des $\mathbb{R}^3$.

(b) Wir betrachten die lineare Abbildung $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}4x_1 - 2x_2 + 7x_3\\ x_1 + 7x_2 + x_3\\ 4x_1 + 4x_2 + x_3\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie zunächst ${}_A[\Phi]_A$ und daraus dann ${}_B[\Phi]_B$ mittels der Matrizen aus (a).

$\boxed{\textbf{109}}$ Es seien V und W endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbb{R}$ sowie $\Phi \colon V \to W$ linear. Bezüglich je einer geordneten Basis B und C von V bzw. W habe Φ die Matrixdarstellung

$$
{}_C[\Phi]_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 5 & -12 & -2 & -9 \end{pmatrix}.
$$

(a) Bestimmen Sie die Koordinatenvektoren bzgl. B zu einer Basis von $\ker \Phi$.

(b) Von den Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ seien die Koordinaten bzgl. B bekannt, nämlich

$$
{}_B[v_1] = \begin{pmatrix}3\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \quad {}_B[v_2] = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\\-3\end{pmatrix}, \quad {}_B[v_3] = \begin{pmatrix}-2\\5\\5\\0\end{pmatrix}.
$$

Bestimmen Sie die Koordinaten der Bildvektoren bzgl. C, d.h. ${}_C[\Phi v_j]$ $(j = 1, 2, 3)$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension des Teilraumes $U := \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ von V sowie des Teilraumes $\Phi(U) = \{\Phi u \mid u \in U\}$ von W.

$\boxed{\textbf{110}}$ Gegeben sei die lineare Abbildung $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $x \mapsto Ax$, wobei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 1 & 9 & 6 \\ 0 & 6 & -4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie mittels Gauß-Algorithmus den Rang von A und bestimmen Sie dann den Kern von A. Können Sie einen Vektor $b \in \mathbb{R}^4$ angeben, der nicht zum Bild von A gehört?

111 Für welche Werte des Parameters $z \in \mathbb{C}$ sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & z^2 \\ 1 & z^2 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & z & 4+8i \\ 1-i & 4 & 2+z \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

invertierbar?

112 (a) Verifizieren Sie, dass eine Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar ist, wenn $\Delta := ad - bc \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie die Inverse A^{-1} in dem Fall explizit. (Und es sei empfohlen, sich die entstehende Formel zu merken. [„$\frac{1}{\Delta}$, auf der Diagonale Platztausch, Minus bei den anderen“.])

(b) Zeigen Sie, dass eine $((2n) \times (2n))$-Matrix in Blockform $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ (also mit quadratischen Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ und 0 die $(n \times n)$-Nullmatrix) genau dann invertierbar ist, wenn A und B invertierbar sind, und in diesem Fall die Inverse von der Form $\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$ ist.

[Hinweis: Eine Richtung ist leicht; bei der Rückrichtung können Sie für die Inverse $\begin{pmatrix} X & R \\ S & Y \end{pmatrix}$ ansetzen und durch blockweise Matrixmultiplikation zunächst ableiten, dass A und B invertierbar sind und wie X und Y aussehen müssen; danach können auch R und S festgenagelt werden.]

Abschließend noch ein Textauszug aus dem Abschnitt Nr. 130 (im Rahmen eines historischen Schlusskapitels) des Buches *Funktionalanalysis* von Harro Heuser, 2. Auflage 1986 im Teubner-Verlag:

> „Zunächst aber müssen wir den Beitrag Peanos schildern. Diesen ungewöhnlich scharfsinnigen Mann kennt jeder Mathematiker als Erfinder eines völlig durchsichtigen Axiomensystems der natürlichen Zahlen und einer völlig undurchsichtigen „Peanokurve“. Weniger bekannt ist seine Leistung in der mathematischen Logik und weitgehend unbekannt seine Erfindung des abstrakten Vektorraumes und der linearen Operatoren, zweier Grundbegriffe der späteren Funktionalanalysis. 1888 veröffentlichte Peano in Turin sein Buch *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* Angeregt durch die dunkle und deshalb weitgehend wirkungslos gebliebene „Ausdehnungslehre“ Grassmanns stellt dieser große Logiker im 9. Kapitel ein System von Axiomen auf, das mit dem heutzutage üblichen des Vektorraumes fast identisch ist und das man vor ihm nicht findet.“