

Weiter „quer durch den Gemüsegarten“ ...

85 Sind die folgenden Matrizen unitär bzw. orthogonal?

$$F = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } G = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}.$$

86 Geben Sie die Polarzerlegung von $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ an. [Überlegen Sie zuerst, dass A invertierbar ist, also die vereinfachte Konstruktion möglich ist. Zumindest $|A|$ sollten Sie komplett von Hand ausrechnen, exakt mit Wurzel ausdrücken; für den unitären Faktor U rechnen Sie ruhig z.B. mit MATHEMATICA exakt weiter; gelegentlich Simplify verwenden und die Ergebnisse auch überprüfen, also z.B., ob Ihre errechneten U und $|A|$ auch tatsächlich $U|A| = A$ erfüllen.]

87 Es sei $U := \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ im unitären Standardraum \mathbb{C}^4 .

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements U^\perp .

88 Führen Sie jeweils die orthogonale Diagonalisierung für die folgenden symmetrischen

Matrizen durch: $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

89 Welche Kegelschnitte sind jeweils durch die folgenden Gleichungen im \mathbb{R}^2 gegeben? [Beachten Sie, dass hier nicht von jedem einzelnen Schritt der Hauptachsentransformation die vollen Details nötig sind, um die Entscheidung treffen zu können.]

- (a) $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 + x_1 - 2x_2 - 1 = 0$,
- (b) $x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 - 1 = 0$,
- (c) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 + x_2 = 0$.

Sind die folgenden Matrizen diagonalisierbar über \mathbb{R} oder \mathbb{C} ? Sind sie orthogonal oder unitär diagonalisierbar?

90 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \\ 6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ **91** $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

Zum Abschluss dieses Übungssemesters noch aus dem Vorwort des Buches *Lineare Algebra und analytische Geometrie* von Theodor Bröcker, Birkhäuser Verlag, 2. Auflage 2004:

„Die Grundbegriffe der Linearen Algebra, wie man sie zur Vorbereitung einer Vorlesung über Algebra braucht, lassen sich auf einem Dutzend Seiten vollständig darstellen. Solche Kürze wird vielleicht gerade Algebraikern vom Fach besonders einleuchten. Aber auf der anderen Seite stehen Bedürfnisse und Interessen aus der Analysis, Geometrie und Physik, die weit über das hinausgehen, was man in einem zweisemestrigen Kurs bewältigen kann.

...

Die Motti, die ich, ohne die Autoren zu verraten, mir zum Vergnügen und manchmal gleichsam als Rätsel, den Kapiteln vorangestellt habe, bitte ich mir wohlwollend durchgehen zu lassen, und die Aufgaben will ich besonders empfehlen.“