UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 5

$\boxed{\mathbf{30}}$ Zeigen bzw. entscheiden Sie folgende Aussagen jeweils für Matrizen aus $M_n(\mathbb{K})$:
(a) Wenn $A \sim B$ (d.h. A und B sind ähnlich), dann haben A und B dieselben Eigenwerte, dieselbe Determinante, dieselbe Spur ... einfacher: dasselbe charakteristische Polynom.
(b) Zwei Diagonalmatrizen sind genau dann ähnlich, wenn sie durch Basiswechsel in Form einer Permutation der Standardbasis ineinander übergeführt werden können.
(c) Das charakteristische Polynom einer oberen Dreicksmatrix zerfällt in Linearfaktoren. Muss so eine Matrix auch diagonalisierbar sein?

$\boxed{\mathbf{31}}$ Zeigen bzw. entscheiden Sie folgende Aussagen für Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$:
(a) Seien A und B diagonalisierbar. Wenn $AB \neq BA$ gilt, dann kann es keine Basis von $\mathbb{K}^n$ geben, die aus Eigenvektoren sowohl für A als auch für B besteht.
[Bemerkung: Im Falle $AB = BA$ ist die sogenannte simultane Diagonalisierung aber möglich.]
(b) Kann es in (a) vorkommen, dass AB diagonalisierbar ist, während BA es nicht ist?[1]
(c) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ ist (reell) diagonalisierbar genau dann, wenn $bc > 0$ oder $b = c = 0$.

$\boxed{\mathbf{32}}$ Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n \in \mathbb{N}$, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\Phi \in L(V)$. Zeigen Sie: ${}_B[\Phi]_B$ ist genau dann eine obere Dreicksmatrix, wenn für jedes $k = 1, \ldots, n$ der Teilraum $V_k := \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ invariant unter Φ ist, d.h. $\Phi(V_k) \subseteq V_k$.

Für die Aufgaben $\boxed{33}$-$\boxed{35}$ nehmen wir an, dass das charakteristische Polynom χ_A von $A \in M_n(\mathbb{K})$ komplett in Linearfaktoren zerfällt (was z.B. im Falle $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ immer zutrifft).
[Gemäß eines Resultats der VO muss das charakteristische Polynom einer diagonalisierbaren Matrix notwendig in Linearfaktoren zerfallen, aber die Umkehrung davon gilt eben nicht.]
Wir nehmen also an, dass mit den (nicht notwendig verschiedenen) Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ von A die folgende Zerlegung gilt: $\chi_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n)$.

$\boxed{\mathbf{33}}$ Zeigen Sie: $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ und $\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

$\boxed{\mathbf{34}}$ Sei $n \geq 2$. Wir wählen einen Eigenvektor v_1 zu λ_1 und ergänzen durch $B' := \{u_2, \ldots, u_n\}$ zu einer Basis B von $\mathbb{K}^n$. Weiters setzen wir $V_1 := \operatorname{span}\{v_1\}$ und $U := \operatorname{span} B'$, sodass $\mathbb{K}^n = V_1 \oplus U$. Für $j = 2, \ldots, n$ sei jeweils $Au_j = c_{1j}\, v_1 + u'_j$, wobei $u'_j \in U$ und $c_{1j} \in \mathbb{K}$ eindeutig bestimmt sind. Schließlich seien die linearen Abbildungen $L \colon U \to U$ und $\alpha \colon U \to \mathbb{K}$ durch die Werte $L(u_j) := u'_j$ bzw. $\alpha(u_j) := c_{1j}$ auf der Basis B' festgelegt. Zeigen Sie zunächst die Relation $Au = \alpha(u) v_1 + L(u)$ für alle $u \in U$. Weiters schließen Sie durch Betrachtung der Matrix ${}_B[A]_B$, dass $\chi_A(x) = (\lambda_1 - x)\chi_L(x)$ gilt und daher das charakteristische Polynom von L ebenfalls in Linearfaktoren zerfällt.

$\boxed{\mathbf{35}}$ Beweisen Sie mit der Konstruktion aus $\boxed{34}$ und mit Hilfe von $\boxed{32}$ durch Induktion nach n, dass A ähnlich zu einer oberen Dreicksmatrix ist. [Hinweis: Falls $w_1, \ldots, w_{n-1}$ eine Basis von U ist, bezüglich der L obere Dreiecksform annimmt, dann betrachte V_1 und $V_k := \operatorname{span}\{v_1, w_1, \ldots, w_{k-1}\}$ für $k = 2, \ldots, n$.]

Bemerkung: Wir haben hier den sogenannten *Trigonalisierungssatz*[2] bewiesen: Eine quadratische Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix. Insbesondere ist damit jede komplexe quadratische Matrix ähnlich zu einer solchen. (Dies wird im 3. Semester mit der Jordan-Normalform noch vertieft.)

[1] Es schadet fast nie, zunächst mit 2×2-Matrizen zu „experimentieren“ ...
[2] Im aktuellen Curriculum findet sich dazu der Begriff „Triangulierung“.