UE Lineare Algebra und Geometrie 1 SS 19

Blatt 8

$\boxed{\textbf{50}}$ In $M_2(\mathbb{C})$ betrachten wir den reellen Teilraum $H(2)$ aller Hermiteschen 2×2-Matrizen sowie die *Pauli-Matrizen* $\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right), \sigma_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie, dass $B := (1_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ eine (geordnete) Basis von $H(2)$ ist und geben Sie die Inverse $\Phi\colon \mathbb{R}^4 \to H(2)$ des entsprechenden Koordinatenisomorphismus konkret an. Berechnen Sie $\det \Phi(t, x, y, z)$.

$\boxed{\textbf{51}}$ Es sei V ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A \in L(V)$ selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass für $p \in \mathbb{R}[x]$ stets auch $p(A)$ selbstadjungiert ist und $\operatorname{spec}(p(A)) = p(\operatorname{spec}(A))$ gilt.

$\boxed{\textbf{52}}$ Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, V ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $a \in V \setminus \{0\}$. Begründen Sie zunächst, dass durch $H := \{a\}^\perp$ eine *Hyperebene* in V gegeben ist, d.h. H ist ein Teilraum der Dimension $n - 1$. Weiters sei $S \in L(V)$ definiert durch

$$Sx = x - 2\frac{\langle a, x\rangle}{\langle a, a\rangle}a \qquad (x \in V).$$

Zeigen Sie: S ist orthogonal, selbstadjungiert und selbstinvers; weiters gilt $Sa = -a$ und $Sh = h$ für alle $h \in H$. Somit ergibt die geometrische Interpretation von S eine Spiegelung an der Hyperebene H. (Skizze!)

Führen Sie in den Aufgaben $\boxed{53}$-$\boxed{54}$ jeweils die orthogonale Diagonalisierung der gegebenen symmetrischen Matrix durch:

$\boxed{\textbf{53}}$ $A = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 8 \\ -13 & 14 & 8 \\ 8 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ [mit Eigenwerten 27, -15,9], $\boxed{\textbf{54}}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\textbf{55}}$ Im euklidischen Standardraum $\mathbb{R}^3$ sei a ein Einheitsvektor und $R \in L(\mathbb{R}^3)$ für fixes $\alpha \in [0, \pi]$ gegeben durch

$$Rx = \cos(\alpha)\, x + \big(1 - \cos(\alpha)\big)\langle a, x\rangle\, a + \sin(\alpha)\, a \times x \qquad (x \in \mathbb{R}^3).$$

Zeigen Sie: R ist orthogonal[1] und $Ra = a$; weiters nach Ergänzung von a durch normiertes $v_1 \in \{a\}^\perp$ sowie $v_2 := a \times v_1 \in \{a\}^\perp$ zu einer Orthonormalbasis B von $\mathbb{R}^3$ auch $\det R = \det{}_B[R]_B = 1$ und $\operatorname{tr}(R) = \operatorname{tr}_B[R]_B = 1 + 2\cos(\alpha)$. Diskutieren Sie die geometrische Interpretation von R als Drehung im Raum um den Winkel α mit Drehachse a.

$\boxed{\textbf{56}}$ Zeigen Sie zunächst, dass die Matrix $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ normal ist. Wenden Sie dann den reellen Spektralsatz an, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix O, sodass OAO^T in Blöcke zerfällt, die reell diagonal sind oder von der Form $\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

[1] Empfohlen sei dazu ein Rückblick auf Resultate zum Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ aus WS18, speziell die Graßmann-Identität [aus der VO bzw. Waldmann, Band 1, Prop.1.15] und daraus abgeleitet eine Formel für $\langle a \times b, c \times d\rangle$ [Aufgabe im UE-Blatt 1 vom WS18].

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!