UE Lineare Algebra und Geometrie 1 — SS 19

Blatt 9

Nun zu Abschnitt $\boxed{\text{H.6}}$ über Positivität und Polarzerlegung: Aus dem Klassiker *Finite dimensional vector spaces* von Paul R. Halmos, Princeton University Press 1948:

> „The three most important subsets of the complex number plane are the real numbers, the positive real numbers, and the numbers of absolute value one. We shall now proceed systematically to use our heuristic analogy of transformations with complex numbers and try to discover the analogs among transformations of these well known numerical concepts.“

$\boxed{\mathbf{57}}$ Zeigen Sie direkt aus der Definition, dass $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn $a > 0$ und $\det A > 0$. [Hinweis: Für $q(x,y) := (x,y)A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ gilt $aq(x,y) = (ax+by)^2 + (\det A)y^2$.]

$\boxed{\mathbf{58}}$ Zeigen Sie mit Hilfe des Spektralsatzes, dass eine symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ genau dann positiv definit ist, wenn alle Eigenwerte größer als 0 sind.

$\boxed{\mathbf{59}}$ Für invertierbare quadratische Matrizen hatten wir in der VO eine vereinfachte Polarzerlegung besprochen. Was ergibt sich bei Anwendung auf folgende Matrizen jeweils für die Isometrie und den Absolutbetrag?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \text{ mit } \alpha \in [0, 2\pi[.$$

$\boxed{\mathbf{60}}$ In der VO wurde die Polarzerlegung als Schritt 2) im Rahmen der Singulärwertzerlegung diskutiert (bzw. entspricht dies auch gerade Satz 7.129 im Buch von Waldmann, genauer dem Beweisteil zur Existenz). Wiederholen Sie diese Konstruktionsschritte im Detail.

$\boxed{\mathbf{61}}$ Sei $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ wie üblich aufgefasst als lineare Abbildung $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, kann die Größe $v_A(x) := \|Ax\|/\|x\|$ als Längenverzerrungsverhältnis in Richtung x verstanden werden. Zeigen Sie:
(a) Für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist $v_A(\lambda x) = v_A(x)$; weiters $v_A(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \ker A$.
(b) Sei s_0 der größte singuläre Wert von A (daher s_0^2 gerade der größte Eigenwert von A^*A), dann ist $v_A(u) = s_0$ für jeden Eigenvektor u von A^*A zum Eigenwert s_0^2.
(c) Für alle $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ gilt $v_A(x) \leq s_0$. [Zeige $\|Ax\|^2 = \langle x, A^*Ax\rangle \leq s_0^2\|x\|^2$ mittels Spektralsatz für A^*A.]
Bemerkung: $\|A\| := \sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \mid x \in \mathbb{R}^m, x \neq 0\}$ ist gerade die *Operatornorm* von A.

Aufgaben[1] $\boxed{62}$-$\boxed{63}$ beziehen sich jeweils auf die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 6 & 6 & 3 \\ -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\mathbf{62}}$ Berechnen Sie die singulären Werte $s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq 0$ von A.

$\boxed{\mathbf{63}}$ Geben Sie die Singulärwertzerlegung für A an, d.h. bestimmen Sie orthogonale 3×3-Matrizen Q, T, sodass $QAT = \operatorname{diag}(s_0, s_1, s_2)$ wird. (Wegen $m = n = 3$ erhalten wir hier eine Diagonalmatrix und zudem haben Q und T dieselbe Größe.)

[1] Stützen Sie sich hier bei Zwischenrechnungen mit großen Zahlen gerne auf Computer(algebra). Bis auf einzelne Faktoren $\sqrt{2}$ geht es sich eh sehr schön aus, mit rationalen Ausdrücken weiterzurechnen.

Zur Verfügung gestellt von:
Günther Hörmann
UE Lineare Algebra und Geometrie 1, SoSe 2019
LV-Nr.: 250152
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!