Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

DIFFERENTIALRECHNUNG II/RIEMANNINTEGRAL I

(11) Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen, um den Satz über die Differenzierbarkeit von Umkehrfunktionen herzuleiten (d.h. unter welchen Bedingungen können Sie die Gleichung $f(y) = x$ nach y auflösen?)

(12) Zeigen Sie: Wenn $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ konvex und strikt monoton wachsend ist, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} konkav.

(13) Sei $p(x) = x^2 + bx + c$, wo $b, c \in \mathbb{R}$. Schreiben Sie unter Verwendung des Taylorschen Lehrsatzes, für gegebenes $x_0 \in \mathbb{R}$, $p(x)$ als Polynom in $(x - x_0)$ an.

(14) Verwenden Sie das Newton-Verfahren, um $\sqrt{3}$ auf 4 Nachkommastellen genau zu bestimmen (und erklären Sie, warum Sie diese Fehlerabschätzung garantieren können!)

(15) Angenommen $f \in C^\infty([-1/2, 1/2])$ erfüllt die Abschätzung $|f^{(j)}(x)| \le 2^j$ für jedes $j \in \mathbb{N}$, und $x \in [-1/2, 1/2]$. Für welches k können Sie garantieren, dass das Taylorpolynom $T_0^k f(x)$ der Ordnung k im Punkt $x_0 = 0$ für jedes $x \in [-1/2, 1/2]$ die Ungleichung

$$\left| f(x) - T_0^k f(x) \right| \le \frac{1}{10^4}$$

erfüllt?

(16) Sei $f \in C^3([-1,1])$ eine Funktion mit $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 1/2$. Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_0^2 f$ der Ordnung 2 im Punkt 0. Angenommen, $|f^{(3)}(x)| < 1$ für $x \in [-1,1]$. Bestimmen Sie ein Teilintervall $(-\delta, \delta) \subset [-1,1]$ auf dem Sie die Abschätzung $|f(x) - T_0^2 f(x)| < 10^{-5}$ garantieren können.

(17) Zeigen Sie, dass die Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{p}{2^k} \text{ für } p, k \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \le p \le 2^k \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases}$$

nicht Riemann-integrierbar auf dem Intervall $[0,1]$ ist.

(18) Berechnen Sie unter der Verwendung von Riemannsummen bezüglich äquidistanter Unterteilungen das Integral $\int_0^1 x\,dx$.

(19) Zeigen Sie unter Verwendung von Riemannsummen (und der Cauchy-Schwarz Ungleichung für endliche Summen), dass wenn $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ die Eigenschaft haben, dass f^2, g^2 und fg Riemann-integrierbar sind, dann

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\,dx \right)^2 \le \left(\int_a^b f(x)^2\,dx \right) \left(\int_a^b g(x)^2\,dx \right)$$

gilt.

(20) Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $x_0 \in [a,b]$, $c \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$g\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \ne x_0 \\ c & x = x_0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g auch Riemann-integrierbar ist.

Date: April 2016.