Zur Verfügung gestellt von:
Bernhard Lamel
UE Analysis, SoSe 2016
LV-Nr.: 250004
Fakultät für Mathematik, Universität Wien
Danke!

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

RIEMANNINTEGRAL II/EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTION

(21) Let $ab(a-b) \neq 0$ and consider the expression

$$\frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}$$

which is defined for all $x > 0$ except for $x = 1$. Determine

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^a - x^b}{x^{1/b} - x^{1/a}}.$$

(22) Der *hyperbolische Sinus* und der *hyperbolische Cosinus* sind durch

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

definiert. Zeige die folgende Formeln:

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$
$$\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$$
$$\sinh(x+y) = \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y).$$

(23) Zeige: der hyperbolische Sinus $\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist surjektiv und strikt monoton, und besitzt deswegen eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Berechne cosh(arsinh(x)).

(24) Es sei $ab \neq 0$ und

$$h(x) = \frac{\log \cosh ax}{\log \cosh bx}.$$

Man berechne : $\lim_{x \to 0} h(x)$ und $\lim_{x \to \infty} h(x)$.

(25) Man berechne :

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(26) Man berechne :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e - (1+x)^{1/x}}{x}.$$

(27) Man berechne :

$$\int \sqrt{5x-1}\, dx \quad , \int \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}.$$

(28) Berechne

$$\int \cosh(x)\, dx, \quad \int \sinh(x)\, dx.$$

(29)

$$\int (x^2+1) e^{2x-3}\, dx =$$

(30)

$$\int (x^2 + 2x) \sinh x\, dx =$$

(31) (Geeignete Substitution verwenden - erinnere die Formel $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} =$$

Date: April 2016.

(32) Mittels Partialbruchzerlegung berechne man

$$\int \frac{x+2}{x^2-5x+6}\,dx =$$

(33)

$$\int \frac{dx}{(2x-3)(4x+1)} =$$

(34) Let f be a continuous function on $[a,b]$ and suppose that $f \geq 0$ on $[a,b]$ and that $\int_a^b f(x)\,dx = 0$. Show that $f(x) = 0$ for all $x \in [a,b]$.

(35) Berechne die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$$

(36)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

(37)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^4}$$

(38)

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{\cosh x} =$$

(39) Bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_0^1 x^\alpha\,dx$$

konvergiert.

(40) Bestimme, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty x^\alpha\,dx$$

konvergiert.

(41) Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx$$

existiert. (Der Wert muss *noch nicht* bestimmt werden).