

ÜBUNGSAUFGABEN ANALYSIS

POTENZREIHEN/ELEMENTARE FUNKTIONEN

- (42) Zeigen Sie, dass die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (1-x)^\alpha$, für $\alpha \in \mathbb{R}$, reell-analytisch auf $(-1, 1)$ ist.
- (43) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f aus Bsp. 42 im Punkt 0, indem Sie die Taylorkoeffizienten bestimmen.
- (44) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arctan(x)$ im Punkt 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Reihe.
- (45) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \frac{1-x}{3+x}$ im Punkt $x = -2$.
- (46) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung der Funktion $f(x) = \sin(2x)$ im Punkt π .
- (47) Zeigen Sie, dass $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$ gilt (und bestimmen Sie, für welche x, y diese Gleichung gilt).
- (48) Zeigen Sie, dass die Funktion f , welche durch

$$f(x) = \cot(x) - \frac{1}{x} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$$

auf $(-\pi, \pi) \setminus \{0\}$ definiert ist, eine stetige Fortsetzung F auf $(-\pi, \pi)$ besitzt. Zeigen Sie, dass $F \in C^\omega((-\pi, \pi))$ ist, indem Sie eine (konvergente) Potenzreihenentwicklung von F im Punkt 0 angeben.

- (49) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von $\arcsin(x)$ im Punkt 0.
- (50) Bestimmen Sie die komplexen Wurzeln des Polynoms $p(z) = z^n - 1$.
- (51) Zeigen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n-1} e^{i \frac{j\pi}{n}} = 0$$

erfüllt ist.

- (52) Zeigen Sie, dass ein trigonometrisches Polynom

$$p(x) = \sum_{j=-n}^n p_j^s \sin(jx) + \sum_{j=-n}^n p_j^c \cos(jx),$$

wo $p_j^s, p_j^c \in \mathbb{C}$ für $j = 1, \dots, n$, auch in der Form

$$p(x) = z^n q(z) \Big|_{z=e^{ix}}$$

für ein Polynom $q \in \mathbb{C}[z]$ vom Grad $2n$ geschrieben werden kann.

- (53) Bestimmen Sie $\sin(\arctan(x))$ rechnerisch und graphisch.
- (54) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^2 dx.$$

- (55) Berechnen Sie

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)^4 dx.$$

- (56) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

(57) Berechnen Sie

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

(58) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

(59) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

konvergiert. Konvergiert es absolut?

(60) Können Sie den Ausdruck

$$\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$$

vereinfachen?