Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 17.10.

1. Man beweise die Aussage: Die Summe zweier ungerader Zahlen ist gerade.

2. Man bestimme die Primfaktorenzerlegung der folgenden Zahlen:
$$400, \qquad 2049, \qquad 279936, \qquad 362880.$$

3. Man beweise die Aussage: Es gibt keine ganzen Zahlen m und n, sodass
$$12m + 15n = 200\,.$$

4. Man schreibe folgende Ausdrücke ohne Verwendung von Summen- bzw. Produktzeichen:
$$\sum_{k=2}^{7} k^{2k+1}\,, \qquad \sum_{j=-5}^{-2} a_k\,, \qquad \prod_{i=1}^{3} 2^i\,, \qquad \prod_{j=1}^{5} j^3\,.$$

5. Man schreibe folgende Ausdrücke ohne Verwendung von Summen- bzw. Produktzeichen:
$$\sum_{j=3}^{5}\prod_{k=1}^{3}(jk-2)\,, \qquad \sum_{k=0}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_k^j\,.$$

6. Mit Hilfe des vorhergehenden Beispieles verifiziere man die Gleichung
$$\sum_{k=0}^{3}\sum_{j=k}^{3} a_k^j = \sum_{j=0}^{3}\sum_{k=0}^{j} a_k^j\,.$$
Wie kann man direkt zu diesem Resultat kommen? (Hinweis: Über welche Paare (k, j) wird summiert?)

7. Man berechne
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1+(-1)^j}{2}$$
zunächst für $n = 6$ und dann für beliebige natürliche Zahlen n, wobei im zweiten Fall das Resultat verbal beschrieben werden kann.

8. Man berechne

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{ij} \qquad (\delta_{ij} \text{ ist das Kronecker-Delta}).$$

9. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes berechne man

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\,.$$

   Man kontrolliere die beiden Resultate für $n = 4$.

10. Man berechne $p(-2)$ für das Polynom

$$p(x) = \sum_{i=2}^{25}\binom{25}{i}x^i\,.$$

Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 24.10.

1. Für die Funktion $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bestimme man $f(A)$ und $f^{-1}(B)$:
   a) $f(x) = x + 3$, $A = \{1, 2, 5\}$, $B =]-1, 3[$.
   b) $f(x) = x^2 - 1$, $A =]-1, 1[$, $B = \{-1, 0\}$.
   c) $f(x) = 5$, $A = \{0\} \cup]1, 2[$, $B = \{5\}$.

2. Seien A_1, A_2 Teilmengen der Definitionsmenge von f. Man zeige
$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$
   und konstruiere ein Beispiel, bei dem nicht die Gleichheit gilt. Man gebe eine in der Vorlesung definierte Eigenschaft von f an, die die Gleichheit garantiert.

3. Selbe Aufgabenstellung wie im vorigen Beispiel für
$$f(A_1) \setminus f(A_2) \subset f(A_1 \setminus A_2)\,.$$

4. Man untersuche die Abbildung
$$f:\ \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = \frac{1}{x-1}$$
   auf Injektivität und Surjektivität.

5. Man klassifiziere die Abbildung $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^k + a$ mit $k \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, bezüglich der Eigenschaften injektiv und surjektiv. Wenn diese nicht gelten, verkleinere man Definitions- und/oder Bildmenge, sodass die entstehende Abbildung bijektiv ist.

6. Sei $f:\ A \to B$ eine Funktion und $A_1 \subset A$. Man zeige, dass die Mengen $f(A^c)$ und $f(A)^c$ bezüglich $\subset$ im Allgemeinen nicht vergleichbar sind. Was kann man für injektive bzw. surjektive Funktionen aussagen?

7. Man zeige
$$f \text{ und } g \text{ bijektiv} \quad \Rightarrow \quad f \circ g \text{ bijektiv}$$
   und, dass die Äquivalenz nicht stimmt (durch Angabe eines Gegenbeispiels).

8. Man zeige, dass die Abbildung
$$f:\ \{1, 2, 3\}^2 \to \{0, 1, \ldots, 8\}\,, \qquad f((m, n)) = 3(m-1) + n - 1\,,$$
   bijektiv ist, und man bestimme die Umkehrabbildung.

Einführung in die Analysis, WS 16/17,
Übungsblatt, Woche ab 31.10.

1. a) Gibt es zwei Funktionen f und g , die beide nicht bijektiv sind, sodass $f \circ g$ bijektiv ist?
   b) Gibt es zwei Funktionen f und g , die beide nicht injektiv sind, sodass $f \circ g$ injektiv ist?

2. Man zeige, dass für endliche Mengen M

$$\mathrm{card}(\mathbb{P}M) = 2^{\mathrm{card}(M)}$$

   gilt (Hinweis: vollständige Induktion mit $\mathrm{card}(M) = n$).

3. Man beweise

$$\forall x \geq -1 : \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (1+x)^n \geq 1 + nx \, .$$

4. Man beweise, dass $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar ist.

5. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

6. Sei $b \in \mathbb{N}$ (die *Basis*). Man zeige, dass jede natürliche Zahl $n > 0$ in der b-*adischen Darstellung*

$$n = \sum_{j=0}^{K} a_j b^j \qquad \text{(Schreibweise: } n = (a_K a_{K-1} \ldots a_0)_b\text{)}$$

   geschrieben werden kann mit geeignet gewählten $K \in \mathbb{N}$ und *Ziffern* $a_0, \ldots, a_K \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$. Fordert man $a_K \neq 0$, dann ist die Darstellung eindeutig.

7. Man finde die Binär- ($b = 2$) und die Hexadezimaldarstellungen ($b = 16$, Ziffern: $0, \ldots, 9, A, B, C, D, E, F$) von

$$1742, \qquad 1048576, \qquad 213, \qquad 11138.$$