INFO zur VU 835.104 (WS 16/17)

für alle Studierenden der Forstwirtschaft sowie der Holz- und Naturfasertechnologie im 1. Semester an der BOKU

Herzlich willkommen an der Universität für Bodenkultur!

Auf dieser Seite finden Sie kurz gefaßt die wesentlichen Informationen zu Ihrer Grundausbildung im Pflichtfach Mathematik an der BOKU.

Am Ende der dieser Seite angehängten **Aufgabensammlung** *finden Sie den detaillierten* **Modus der Lehrveranstaltung**.

Vorlesungsübung Mathematik I (VU 835.104) – Pflichtlehrveranstaltung
(3 Semesterwochenstunden, immanenter Prüfungscharakter, Anwesenheitspflicht)

Lehrveranstaltungsleiter: Ao.Univ.Prof. Mag. Dr. Gerald KUBA

Die **VU** (insgesamt 45 akad. Stunden) besteht aus einem **1-stündigen Vorlesungsteil**, der auf die *zweite* Semesterhälfte *geblockt* wird, und einem **2-stündigen Übungsteil** während des ganzen Semesters, der aufgrund der internen Prüfungstermine auch (leicht) geblockt wird.

↪ **Vorlesungsteil** immer am **Donnerstag 14:15 - 15:45** in **EH 04**

↪ **Übungsteil** immer am **Freitag** und zwar **17:00 - 18:40** während STEOP
sowie **16:00 - 17:50** nach STEOP

Im *Übungsteil* (drei Gruppen) führen die Studierenden vorbereitete Aufgaben *freiwillig* an der Tafel vor und erklären sie (unterstützt vom Übungsleiter) ihren Kollegen.
In der *ersten Semesterhälfte* werden nur Aufgaben durchgenommen, die mit ausreichenden Kenntnissen und Fertigkeiten aus der Schule bewältigbar sind. Für Studienanfänger mit *unzureichenden Mathematik-Vorkenntnissen* wird der **Mathematik Brückenkurs** (VO 835.091, 1 SWSt.) angeboten. Diese Vorlesung wird auf die *erste* Semesterhälfte *geblockt* und zum *Termin des Vorlesungsteils* der VU abgehalten.

Beginn der Vorlesung am Donnerstag, 6. Oktober 2016
Erste Übungseinheit am Freitag, 7. Oktober 2016
ZWISCHENTEST am 25. November 2016 von 16:15 bis 17:30
ABSCHLUSSTEST am 3. Februar 2017 von 16:00 bis 17:40

- Das **Skriptum** zu *Brückenkurs + VU* ist in der **Lehrmittelstelle** ("BOKU Shop") Peter-Jordan-Straße 76 erhältlich.

G. Kuba

Mathematik

für **Forstwirte** sowie für Holz- und Naturfasertechnologen

AUFGABENSAMMLUNG

zur VU 835.104

Institut für Mathematik
Department für integrative Biologie

Universität für Bodenkultur

WS 2016/17

Aufgaben zur 1. UE-Einheit am 7. Oktober 2016

1. Rampen für Rollstuhlfahrer sollten nicht steiler als 6 Prozent sein. Wie lange muß die (schräge) Rampe mindestens sein, wenn sie den Höhenunterschied 175 Zentimeter überwinden helfen soll.

2. Auf einer Karte im Maßstab $1:75000$ haben zwei Punkte einer geradlinigen Straße, deren Höhenunterschied 76 m beträgt, einen Abstand von 2.4 cm. Berechnen Sie Länge und Steigung der Straße.

3. Auf einem kreisförmigen Platz mit einem Durchmesser von 300 Metern wird eine Arena errichtet, die rundum von einem konstant breiten Zuschauerraum umgeben wird, der exakt die Hälfte des Platzes einnimmt. Berechnen Sie die Breite des Zuschauerraums.

• Ein Elektron hat die Masse $9.109 \cdot 10^{-28}$ Gramm. Ein Proton hat die Masse $1.6724 \cdot 10^{-27}$ Kilogramm. Ein Neutron hat die Masse $1.6748 \cdot 10^{-21}$ Milligramm.

4. Wieviel Elektronen zusammen haben die Masse von genau einem Kilogramm?

5. Wieviele Atome bzw. Moleküle sind in einem Milligramm Wasserstoff(gas) enthalten?

6. Wieviele Moleküle sind in einer Tonne Wasser enthalten?

7. Die *Wahrscheinlichkeit* p, daß unter eintausend Personen, von denen keine an einem 29. Februar geboren ist, genau drei Personen am 21. April Geburtstag haben, ist durch

$$p = \frac{1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot 364^{997}}{6 \cdot 365^{1000}}$$

exakt gegeben. Stellen Sie mit Hilfe eines *zu den Tests zugelassenen* Taschenrechners die Zahl p als Dezimalzahl dar!

8. Wieviele Nullen haben die Zahlen $10 \cdot 10^6$ und 10^{10^6} und $(10 \cdot 10)^6$ und $\left(10^{10}\right)^6$ in der Dezimalzahlendarstellung hinter dem Einser?

9. Lösen Sie die Gleichung $x(x-1) = 2$.

10. Lösen Sie die Gleichung $10x^2 - 50x + 60 = 0$.

11. Lösen Sie die Gleichung $10x^2 - 52x + 64 = 0$.

12. Lösen Sie die Gleichung $e^{(x-5)(x+7)} = 1$.

13. Zeigen Sie, daß die Gleichung

$$(x^2 + 2x + 3) \cdot (x^2 + 2x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 3) \cdot (x^2 - 2x - 3) = 0$$

genau vier reelle Lösungen besitzt und berechnen Sie dieselben.

• Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung **14.)** $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$

15.) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$ **16.)** $100^x + 5 \cdot 10^x - 36 = 0$

17. Zeigen Sie, daß die Gleichung $5x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 21x + 12 = 0$ keine negative Lösung hat.

18. Zeigen Sie, daß es keine reelle Zahl x gibt, die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{2}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+x} = \frac{x+1}{x^2-x}$$

Aufgaben zur 2. UE-Einheit am 14. Oktober 2016

19. Zeichnen Sie die Graphen der beiden linearen Funktionen

$$x \mapsto 3x - 5 \qquad \text{und} \qquad x \mapsto 5 - 3x$$

und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der beiden Graphen.

20. Zeichnen Sie die durch $3x - 2y = 4$ und $x + 4y = 8$ festgelegten Geraden und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts derselben.

21. Stellen Sie fest, ob die drei Punkte $A(12, 21)$ und $B(123, 321)$ und $C(1234, 4321)$ auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

22. Ein 10 Meter hoher (lotrechter) Baum wirft auf die waagrechte Standfläche einen 17 Meter langen Schatten. Wie hoch ist ein anderer Baum, der gleichzeitig einen 23 Meter langen Schatten wirft? Wie groß ist der Einfallswinkel des Lichts in Bezug zur Standfläche?

23. In einem Dreieck betragen die Seitenlängen 5 Einheiten und 8 Einheiten und 12 Einheiten. Man berechne den *stumpfen Winkel* des Dreiecks.

24. In einem *gleichschenkeligen* Dreieck beträgt die Länge der gleichlangen Seiten 8 Einheiten. Die Länge der Basis beträgt 15 Einheiten. Man berechne den gemeinsamen Wert der beiden *spitzen Winkel* des Dreiecks.

25. In einem Dreieck betragen die Seitenlängen 15 Einheiten und 16 Einheiten und 17 Einheiten. Man berechne den *kleinsten Winkel* des Dreiecks.

26. In einem Dreieck betragen die Seitenlängen 25 Einheiten und 26 Einheiten und 27 Einheiten. Man berechne den *größten Winkel* des Dreiecks.

27. Von einem Dreieck kennt man die Längen 6 und 8 Einheiten zweier anstoßender Seiten sowie den von ihnen eingeschlossenen Winkel, der 70 Grad beträgt. Man berechne den Umfang des Dreiecks.

28. Bestimmen Sie *im Bogenmaß* alle Lösungen der Gleichung $6(\cos x)^2 - 5 \cos x = -1$ im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$.

29. Bestimmen Sie *im Bogenmaß* alle Lösungen der Gleichung $6(\sin x)^2 + 5 \cos x = 7$ im Bereich $0 \leq x \leq 2\pi$.

30. Die Längen der Diagonalen eines Rhombus betragen 12 und 16 Einheiten. Man berechne Umfang, Flächeninhalt und alle Seitenwinkel des Rhombus.

31. Von einem Deltoid kennt man die Längen zweier Seiten, die 8 und 15 Einheiten betragen, sowie den Flächeninhalt, der 120 Quadrateinheiten beträgt. Man berechne die vier Winkel des Deltoids.

32. Auf einer genau nach Süden ausgerichteten und vertikal angebrachten Sonnenuhr ist der schattenwerfende Stab der Länge 78 Zentimeter nach unten mit einem Winkel zum Lot von 60 Grad geneigt. Wie lange ist der genau zu Mittag geworfene Schatten, wenn das Sonnenlicht unter 52 Grad einfällt?

33. Ein Tortenstück (kreissektorförmige Grundfläche) soll gerecht halbiert werden. Der Schnitt soll aber nicht symmetrisch durch die Spitze geführt werden, sondern *rechtwinkelig* auf die symmetrische Schneiderichtung. In welchem Abstand von der Tortenspitze ist das Messer zu setzen, um auf diese Weise eine exakte Halbierung des Tortenstücks zu erreichen?

Aufgaben zur 3. UE-Einheit am 21. Oktober 2016

> Die *(erste) Ableitung* einer differenzierbaren reellen Funktion f *an der Stelle* a ist eine wohldefinierte Zahl, die mit $f'(a)$ bezeichnet wird. *Physikalisch* ist die Ableitung eine *Geschwindigkeit*. *Geometrisch* ist $f'(a)$ die *Steigung der Tangente im Punkt* $(a, f(a))$ *der Kurve* $y = f(x)$.
>
> Eine zugehörige *Tangentengleichung* ist daher $y = f'(a)\,x + d$ mit einer passenden Konstanten d. Diese Konstante ist zwangsläufig durch $d = f(a) - af'(a)$ gegeben. Somit ist auch $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ eine Tangentengleichung!

34. Erklären Sie die berühmte *Grenzwert-Definition* $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ der Ableitung von f an der Stelle a.

• Berechnen Sie in den folgenden vier Aufgaben einerseits $f(2)$ und andererseits $f'(2)$.

35. $f(x) = x^3 + 1$ **36.** $f(x) = x^2 - 3x$ **37.** $f(x) = \frac{2}{x}$ **38.** $f(x) = \frac{1}{x^2}$

39. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an die Kurve $y = 2 + (1 + 3x)^4$ im Kurvenpunkt $(0, 3)$.

40. Stellen Sie die Gleichungen der Tangenten in den beiden Schnittpunkten der Parabel $y = 9 - x^2$ mit der x-Achse auf.

41. Es sei $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ für $x \leq 1$ und $f(x) = \sqrt{x}$ für $x > 1$. Hat die Kurve $y = f(x)$ im Kurvenpunkt $(1, 1)$ eine Tangente? Bestimmen Sie ggf. die Tangente!

42. Es sei $f(x) = e^{2x} - 1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = kx$ für $x > 0$. Für welche Konstante k besitzt die Kurve $y = f(x)$ im Kurvenpunkt $(0, 0)$ eine Tangente?

> Die *(erste) Ableitung* einer differenzierbaren reellen Funktion f ist eine (naheliegenderweise mit f' bezeichnete) Funktion, die jeder reellen Zahl x die Zahl $f'(x)$ als Funktionswert zuweist.

• Berechnen Sie in den folgenden sechs Aufgaben jeweils $f'(x)$.

43. $f(x) = e^{3x+4}$ **44.** $f(x) = (x^2 - 4x)^5$ **45.** $f(x) = \sqrt{x^4 + 3x^2 + 1}$

46. $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ **47.** $f(x) = x^2 \sin(3x - 7)$ **48.** $f(x) = x \ln(x^2 + 3)$

49. Ermitteln Sie alle Punkte auf der Kurve $y = 4x^3 - 8x^2 + 4x - 7$, wo die Tangente an die Kurve horizontal, dh. parallel zur x-Achse ist.

50. Ermitteln Sie alle Punkte auf der Kurve $y = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 28x - 31$, wo die Tangente an die Kurve parallel zur Geraden $y = 2x$ ist.

51. Die Flugbahn eines vom Punkt $(0, 12)$ abgefeuerten Geschoßes ist durch die Parabel $y = 12 + 2.7x - 0.03x^2$ modelliert. Der Landepunkt des Geschoßes liegt auf der x-Achse. Berechnen Sie die Flugweite und die Steighöhe des Geschoßes. (*Skizze!*)

> Eine differenzierbare reelle Funktion F ist eine *Stammfunktion* der reellen Funktion f genau dann, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle Stellen x gilt.

52. Finden Sie *drei* Stammfunktionen von $f(x) = 3x^2 + 4x - 5$.

53. Finden Sie zu jeder natürlichen Zahl n eine Stammfunktion von $f(x) = x + \cos x$ dergestalt, daß $f(0) = n$ gilt.

Aufgaben zur 4. UE-Einheit am 28. Oktober 2016

Das *unbestimmte Integral* $\int f(x)\,dx$ ist die *Kollektion aller Stammfunktionen von* f. Man schreibt

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

wobei F *irgendeine* Stammfunktion von f ist. (Für *jede* Stammfunktion S von f gilt $S(x) = F(x) + c$ mit einer Konstanten c.)

• Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale und überprüfen Sie Ihre Lösung durch Probe.

54.) $\int (3x-2)\cdot e^{-x}\,dx$ **55.)** $\int (2x-3)\cdot \ln x\,dx$ **56.)** $\int (4x-5)\cdot \sin x\,dx$

• Ohne umständliche (aus der Schule bekannte) Substitution löse man durch *gezieltes Erraten* die folgenden unbestimmten Integrale.

57.) $\int x \cdot \sin(x^2+\pi)\,dx$ **58.)** $\int x\sqrt{3-x^2}\,dx$ **59.)** $\int x^3\, e^{3-x^4}\,dx$

• Es sei f eine stetige reelle Funktion und F eine Stammfunktion von f. Im Lichte der vorigen Aufgabe stelle man praktische *Formeln* zur Berechnung von:

60.) $\int f(ax+b)\,dx$ **61.)** $\int x\cdot f(ax^2+b)\,dx$ **62.)** $\int x^2\cdot f(ax^3+b)\,dx$

63.) $\int (\cos x)\cdot f(a+b\sin x)\,dx$ **64.)** $\int e^{-x}\cdot f(a+b\,e^{-x})\,dx$

Das *bestimmte Integral* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist eine wohldefinierte Zahl, sofern f eine auf dem Intervall $a \le x \le b$ definierte stetige reellwertige Funktion ist. Gilt stets $f(x) \ge 0$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ der *Flächeninhalt* des Bereichs $0 \le y \le f(x)$ $(a \le x \le b)$. Immer gilt $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

• Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

65.) $\int\limits_0^1 (x^5+x^4+x^3)\,dx$ **66.)** $\int\limits_1^2 x\cdot e^{-x^2}\,dx$ **67.)** $\int\limits_0^\pi (1+\sin(3x))\,dx$

68.) $\int\limits_{-1}^2 x\cdot e^{-u}\,dx$ **69.)** $\int\limits_0^1 t\cdot e^{-x}\,dx$ **70. a)** $\int\limits_0^3 u\cdot e^{-u}\,dx$ **b)** $\int\limits_0^u u\cdot e^{-u}\,dt$

71. Gesucht ist der Flächeninhalt des Bereichs $0 \le y \le x^3 - x^2 + 5$ $(4 \le x \le 7)$

72. Gesucht ist der Flächeninhalt des Bereichs $0 \le y \le \sqrt{18-2x}$ $(-9 \le x \le 7)$.

73. Gesucht ist der Flächeninhalt des Bereichs $|y| \le \sqrt{15-3x}$ $(-6 \le x \le 5)$.

74. Gesucht ist der Flächeninhalt des linsenförmigen Bereichs $x^2 \le y \le \sqrt{x}$. (*Skizze!*)

75. Gesucht ist der Flächeninhalt des Bereichs, der von der durch $y^2 = x^2 - x^4$ und $x \ge 0$ festgelegten Kurve umrandet wird. (*Hinweis:* Für $0 \le x \le 1$ gilt $\sqrt{x^2-x^4} = x\sqrt{1-x^2}$.)

Aufgaben zur 5. UE-Einheit am 4. November 2016

> Das *Maximum/Minimum* einer reellwertigen Funktion f auf dem Intervall $a \le x \le b$ ist der *größte/kleinste Funktionswert* $f(\xi)$ mit $a \le \xi \le b$. Die *Existenz* des Maximums und des Minimums ist garantiert, falls f *stetig* ist. (*Minimaxprinzip!*)

Schulisches Ärgernis eines umständlichen Kochrezeptes: *Gesucht ist das Maximum und das Minimum von* $f(x) = x^3 - 3x + 1$ *auf dem Intervall* $-3 \le x \le 3$. In der Schule pflegt man folgende Vorgangsweise: Erstens $f'(x) = 3x^2 - 3$ ausrechnen, zweitens $f''(x) = 6x$ aurechnen, drittens $f'(x) = 0$ lösen, also die Lösungen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ der Gleichung $3x^2 - 3 = 0$ bestimmen, viertens $f''(x_1), f''(x_2)$ ausrechnen, also $f''(-1) = -6$ und $f''(1) = 6$, fünftens erkennen, daß $f''(-1)$ negativ und $f''(1)$ positiv ist, sechstens damit feststellen, daß f an der Stelle -1 bzw. 1 ein lokales Maximum bzw. Minimum hat, siebentens auswerten $f(-1) = 3$ und $f(1) = -1$, achtens voreilig die *Lösung der Aufgabe* aufschreiben: *Das Maximum ist* 3, *das Minimum ist* -1. Im Nachhinein *vielleicht* erkennen, daß da etwas faul ist, weil der Rand des Bereiches $-3 \le x \le 3$ ignoriert wurde und doch $f(-3) = -17$ und $f(3) = 19$ gilt. Daher das vorige Ergebnis als *falsch* verwerfen und die *tatsächliche Lösung der Aufgabe* aufschreiben: *Das Maximum ist* 19, *das Minimum ist* -17. (Stimmt das nun wirklich?)

Schulisches Ärgernis einer peinlichen Ratlosigkeit: *Gesucht ist das Maximum und das Minimum von* $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$ *auf dem Intervall* $0 \le x \le 3$. Nocheinmal die in der Schule gepflegte umständliche Vorgangsweise: Erstens $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$ ausrechnen, zweitens $f''(x) = 6x - 12$ aurechnen, drittens $f'(x) = 0$ lösen, also die (einzige) Lösung $x_0 = 2$ der Gleichung $3x^2 - 12x + 12 = 0$ bestimmen, viertens $f''(x_0)$ ausrechnen: $f''(2) = 0$. Da $f''(2)$ weder positiv noch negativ ist, weiß der Schüler (und manchmal auch der Lehrer) nicht, wie man nun weitermachen sollte, um abschließend zur gewünschten Lösung dieser Aufgabe zu gelangen: *Das bei den Lehrern so beliebte, den Schülern aufgezwungene Kochrezept ist somit nicht nur lächerlich umständlich, sondern kann auch völlig versagen!*

$\hookrightarrow$ **Verwenden Sie bei Extremwertaufgaben in den Übungen immer die folgende Methode.** (Bei den Tests steht es grundsätzlich jedem frei, wertvolle Arbeitszeit zu verschwenden und einfach ausführbare Aufgaben unnötig umständlich zu rechnen.)

> Das *Maximum/Minimum* einer stetigen, reellwertigen Funktion f auf dem Intervall $a \le x \le b$ ist der *größte/kleinste* Wert unter den (meist wenigen) Funktionswerten $f(a)$, $f(b)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., wobei $x_1, x_2, x_3, \ldots$ *sämtliche* Stellen x mit $a < x < b$ sind, für die entweder $f'(x) = 0$ gilt oder $f'(x)$ nicht existiert.

76. Erklären Sie mit einem *Ausschluß-Argument* (was, wenn $a < x < b$ und $f'(x) \neq 0$?) in einfachen Worten, warum diese Extremwertberechnungsmethode zielführend sein muß. Bestimmen Sie ferner jeweils das Maximum und das Minimum bei den beiden obigen Beispielen *schulischen Ärgernisses.*

• In den folgenden acht Aufgaben ist jeweils das Minimum und das Maximum der stetigen reellwertigen Funktion f auf dem Intervall $a \le x \le b$ zu ermitteln.

77. $f(x) = 3x^5 - 65x^3 + 540x + 27\,; \quad -2 \le x \le 4$

78. $f(x) = x^2(1 - x^2)\,; \quad 0 \le x \le 1$ **79.** $f(x) = 7 - e^{x^2}(3x + 5)\,; \quad -1 \le x \le 1$

80. $f(x) = x^3 + 4x + \sin(4x)\,; \quad -3 \le x \le 2$ **81.** $f(x) = \frac{x^3 - 5x}{x^2 + 3}\,; \quad -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

82. $f(x) = x + \cos x\,; \quad 0 \le x \le 6\pi$ **83.** $f(x) = 5 - x^3 - e^{2x}\,; \quad -1 \le x \le 1$

84. $f(x) = x + |x^2 - 1|\,; \quad -2 \le x \le 2$

85. Aus einem Baumstamm wird ein Balken so herausgesägt, daß der dabei entstehende Abfall *möglichst gering* ist. Wie muß der Querschnitt des Balkens dann genau aussehen?

86. Aus einem Baumstamm wird ein Balken mit *maximaler Tragfähigkeit* herausgesägt. Wie muß der Querschnitt des Balkens dann genau aussehen? (Aus der Statik weiß man, daß die Tragfähigkeit eines Balken proportional zum Produkt seiner Breite und dem Quadrat seiner Dicke ist.)

Aufgaben zur 6. UE-Einheit am 11. November 2016

87. Durch die drei Punkte $(-1,1,2)$ und $(1,-2,0)$ und $(-2,0,1)$ ist eine Ebene zu legen. Bestimmen Sie die *Gleichung* dieser Ebene in der Standardform $ax+by+cz=d$.

88. Stellen Sie fest, ob die vier Punkte $A(0,-1,2), B(6,-2,1), C(7,0,6), D(-7,3,5)$ in einer *gemeinsamen* Ebene liegen.

• Gegeben ist das Dreieck durch die Punkte $A(-1,3,0), B(12,3,-1), C(3,14,-2)$. Berechnen Sie **89.)** den *Umfang* und **90.)** den *Flächeninhalt.*

91. Auf der Geraden g durch die Punkte $A(-1,0,-5)$ und $B(2,4,7)$ ist zunächst einmal derjenige Punkt C zu ermitteln, den man durch Abtragen einer Strecke der Länge 52 von A aus in Richtung nach B bekommt. Ermitteln Sie dann die Gleichung der Ebene durch den Punkt C, die normal auf die Gerade g steht.

• Bestimmen Sie **92.)** den *Schnittpunkt* und **93.)** den *Schnittwinkel* der Diagonalen AC und BD des Vierecks durch die Punkte $A(-3,-4), B(5,-2), C(6,7), D(-8,4)$.

94. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(-3,7)$ und $B(12,2)$ sowie die Gleichung der Geraden h, die durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht und mit der Geraden g einen rechten Winkel einschließt.

95. Von welchen Punkten P der Geraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ aus sieht man die Punkte $A(1,-5,8)$ und $B(6,3,-2)$ unter einem rechten Winkel? (*Um Mißverständnisse zu vermeiden:* ABP soll ein Dreieck mit einem rechten Winkel in P sein!)

96. Es sei g die Gerade, die den Punkt $(-1,2,-4)$ mit dem Ursprung $(0,0,0)$ verbindet, und h die Gerade, die den Punkt $(2,-3,5)$ mit dem Ursprung $(0,0,0)$ verbindet. Berechnen Sie den *Winkel* zwischen den (einander schneidenden) Geraden g und h.

97. Gegeben sind zwei Ebenen ε_1 und ε_2 durch die Gleichungen

$$2x+4y-5z = 8 \qquad \text{und} \qquad 3x-5y+7z = 9\,.$$

Gesucht ist die *Gleichung* derjenigen Ebene, die durch den Punkt $(0,0,1)$ geht und normal auf die Schnittgerade der Ebenen ε_1 und ε_2 steht.

98. Eine Ebene ist durch die drei Punkte $A(-1,1,0)$ und $B(1,-2,0)$ und $C(8,6,1)$ festgelegt. Ferner ist eine Gerade durch die beiden Punkte $P(-7,-5,0)$ und $Q(4,6,12)$ festgelegt. Berechnen Sie die Koordinaten des *Schnittpunktes* von Gerade und Ebene.

99. Von einem gleichschenkeligen Dreieck ABC, wobei die Seiten AC und BC gleich lang sind, kennt man die Eckpunkte $A(-5,1,2)$ und $B(7,0,-4)$. Der Punkt C liegt auf der Geraden, die die Punkte $P(0,0,-5)$ und $Q(-2,3,0)$ verbindet. Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt des Dreiecks.

100. Bei den Geländepunkten $A(-300,800,25)$, $B(700,200,20)$ und $C(500,900,15)$ werden vertikale Bohrungen durchgeführt. Dabei stößt man auf eine ebene geologische Schicht in 15.7 Metern bei A, in 18.3 Metern bei B und in 9.4 Metern bei C. Bei welcher Bohrtiefe stößt man auf diese geologische Schicht beim Geländepunkt $D(500,400,30)$?

101. Man bestimme die Zahlen a,b so, daß die beiden Vektoren
$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ kollinear sind.

Aufgaben zur 7. UE-Einheit am 18. November 2016

102. Ein Körper $\mathcal{K}$ hat als Grundfläche eine Ellipse mit längstem Durchmesser 12 und kürzestem Durchmesser 8. Jede Ebene, die $\mathcal{K}$ trifft und auf die Hauptachse der Ellipse senkrecht steht, schneidet aus $\mathcal{K}$ ein Quadrat heraus. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $\mathcal{K}$.

103. Die Grundfläche eines Körpers $\mathcal{K}$ ist ein Trapez durch die Punkte $(0,0,0),(10,0,0)$, $(10,5,0),(0,10,0)$. Jede Ebene, die $\mathcal{K}$ trifft und parallel zur y,z-Ebene ist, schneidet aus $\mathcal{K}$ einen Halbkreis heraus. Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{K}$.

104. Berechnen Sie das Volumen des durch
$$1 \le x \le 3\ , \quad -1 \le y \le 0\ , \quad 0 \le z \le x^3y^2 + y^4$$
gegebenen Normalkörpers.

105. Berechnen Sie das Volumen des durch
$$0 \le x \le 1\ , \quad x^2 \le y \le x\ , \quad -x^3y \le z \le xy^2$$
gegebenen Normalkörpers.

106. Berechnen Sie das Volumen des durch
$$4x^2 - 4 \le y \le 5 - 5x^2 \quad \text{und} \quad x^2 + 2y \le z \le x^3 + 3y + 6$$
festgelegten Normalkörpers.

- Berechnen Sie die folgenden vier Gebietsintegrale:

107. $\int\limits_{-1}^{5}\int\limits_{1}^{4}(x^3y^2+1)^2\,dy\,dx$

108. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \cos(2x-3y)\ d(x,y)$, $\quad \mathcal{D}$ = Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(1,0)\ ,\ (9,0)\ ,\ (1,7)$.

109. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(8-4\sqrt{x^2+y^2}\right)^3 d(x,y)$, $\quad \mathcal{D}$ = Kreisscheibe mit Mittelpunkt (0,0) und Radius 4.

110. $\iint\limits_{\mathcal{D}} xe^{-y}\ d(x,y)$, $\quad \mathcal{D}$ = Parabelsegment $\ x^2 \le y \le x+6$

111. Die Fläche $0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le e^x$ rotiert um die y-Achse als Drehachse. (*Skizze!*) Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

112. Die durch $1 - x^2 \le y \le 2 - 2x^2$ festgelegte Fläche in der xy-Ebene rotiert um die x-Achse.(*Skizze!*) Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

113. Die Achsen zweier Drehzylinder von gleichem Radius r schneiden einander rechtwinkelig. Berechnen Sie das Volumen des *Schnittkörpers* $\mathcal{K}$ der beiden Drehzylinder.
HINWEIS: Man modelliere die beiden Zylinder so, daß die x-Achse die Drehachse des einen Zylinders und die y-Achse die Drehachse des anderen Zylinders ist. Dann schneidet jede zur x,y-Ebene parallele Ebene, die $\mathcal{K}$ trifft, aus dem Körper $\mathcal{K}$ ein *Quadrat* heraus, dessen Mittelpunkt in der z-Achse liegt und dessen Seiten parallel zur x- bzw. y-Achse sind.

Aufgaben zur 8. UE-Einheit am 2. Dezember 2016

114. Die in einer horizontalen Standebene liegenden Punkte A_0, B_0, C_0 sind die Eckpunkte eines rechtwinkeligen Dreiecks, die Seite A_0B_0 beträgt exakt 10 Meter, die Seite A_0C_0 beträgt exakt 8 Meter, die Seite B_0C_0 beträgt exakt 6 Meter. In den drei Punkten werden vertikale Masten errichtet, sodaß A_0, B_0, C_0 die Fußpunkte der drei Masten darstellen. Die Spitzen der drei Masten werden entsprechend mit A, B, C bezeichnet und bilden die Eckpunkte einer dreieckigen, ebenen Dachfläche $\mathcal{D}$. Der Mast $\overline{A_0A}$ habe eine Länge von 5 Metern, die Länge des Mastes $\overline{B_0B}$ betrage 7 Meter und die des Mastes $\overline{C_0C}$ betrage 8 Meter. Berechnen Sie den *Umfang* und den *Flächeninhalt* der Dachfläche $\mathcal{D}$, sowie den *Horizontalneigungswinkel* der Dachebene.

115. Ein gerader Weg in einem Gelände, der durch zwei Punkte A und B festgelegt ist, deren Grundrisse durch $A'(-600, 100)$ und $B'(700, 200)$ gegeben sind, soll *graduiert* werden. Die Höhenkote von A beträgt 90 Meter, die von B 130 Meter. Ermitteln sie (im Grundriß) diejenigen Punkte des Weges, deren Höhenkoten 100, 110, 120 Meter betragen.

116. Ein ebenes Gelände sei durch eine Fallgerade festgelegt, die durch die Punkte $A(5, 10, 15)$ und $B(60, 30, 10)$ geht. Ermitteln Sie jeweils die beiden Grundrißkoordinaten des höchsten und des tiefsten Punktes eines ellipsenförmigen Geländeweges, der durch den Punkt A geht und dessen Grundriß ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ ist.

In den folgenden drei Aufgaben ist die Geländeebene γ durch die Gleichung $x-2y+5z = 0$ gegeben.

117. Bestimmen Sie den Anstieg der Fallgeraden der Geländeebene γ und den Neigungswinkel der Geländeebene γ.

118. Bestimmen Sie die Steigung einer geraden Straße des Geländes γ, deren Achse in der Profilebene $x - 3y = 7$ liegt.

119. Bestimmen Sie die Richtung der geraden Straßen des Geländes γ, die 12% Steigung haben.

In den folgenden vier Aufgaben ist die Geländeebene γ durch die Punkte $A(-40, -90, 0)$, $B(80, 20, -5)$ und $C(70, -30, 10)$ festgelegt.

120. Bestimmen Sie die Höhengerade von γ durch C durch Angabe einer Profilebene.

121. Bestimmen Sie Anstieg und Neigungswinkel von γ.

122. Bestimmen Sie die Steigung einer geraden Straße des Geländes γ, deren Achse in der Profilebene durch die Grundrißpunkte $(10, 0)$ und $(0, 15)$ liegt.

123. Ermitteln Sie beide Achsen der geraden Straßen des Geländes γ durch den Achsenpunkt A, die 7% Steigung haben, jeweils durch Bestimmung eines weiteren Achsenpunkts.

124. Die Gerade $g : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$ modelliere einen Straßenrand, der mit einer (ebenen) Mauer abzuböschen ist, die den realistischen Anstieg $3 : 1$ aufweist. Bestimmen Sie also diejenigen Ebenen ϵ, die die Gerade g tragen und den Anstieg $k_\epsilon = 3$ aufweisen.

125. Ein ebenes Gelände sei durch eine Fallgerade festgelegt, die die Punkte $A(5, 10, 15)$ und $B(60, 30, 25)$ verbindet. Ermitteln Sie den *tiefsten Punkt* desjenigen parabelförmigen Geländeweges, dessen Grundriß durch $y = x^2$ festgelegt ist.

Aufgaben zur 9. UE-Einheit am 9. Dezember 2016

126. Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen von $f(x,y) = (3x^5 + 5y^3)^7$ bei $(x,y) = (-2,1)$.

127. Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungen von

$$f(x,y) \;=\; \sqrt{\frac{x^3y^2 + x^2y - x}{x^4 + y^2}}$$

bei $(x,y) = (2,3)$.

- Berechnen Sie die beiden partiellen Ableitungsfunktionen von

128.) $f(x,y) \;=\; x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 - 7x^2y^3 + 4xy^4 - 8y^5$

129.) $f(x,y) \;=\; \sqrt{1 + 2x^4 + 3y^8 + x^2y^6}$

130.) $f(x,y) \;=\; \ln(2 + (3x - 5y)^4 + e^{xy})$

131.) $f(x,y) \;=\; (5x^2y + 7y^2)\, e^{3x-5y}$

132.) $f(x,y) \;=\; x^3y^5 \cdot \cos(\pi - x^2y^3)$

133. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) \;=\; xy^2 + 4x^2y^3 + 8$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z \;=\; f(x,y)$ im Flächenpunkt $P(2,-1,\cdot)$.

134. Gegeben sei die Funktion $f(x,y) \;=\; e^{x^2y^3} + 1$. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche $z \;=\; f(x,y)$ im Flächenpunkt $P(1,0,2)$.

135. Man ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt $(x,y) = (5,-7)$ der implizit gegebenen Kurve $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5 = 51012$ in der x,y-Ebene, indem man die Kurve als Schnitt der x,y-Ebene mit einer passenden Raumfläche $z \;=\; f(x,y)$ auffaßt und aus der Tangentialebene derselben die gesuchte Tangente herausschneidet.

- In den folgenden drei Aufgaben sind jeweils alle *kritischen Punkte* (u,v) der Elementarfunktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu bestimmen.

136. $f(x,y) \;=\; x^3 - y^3 + 3xy$

137. $f(x,y) \;=\; 2x^2 + y^2 - xy - 7y + 5$

138. $f(x,y) \;=\; (x^2 + 2y^2) \cdot \exp(1 - x^2 - y^2)$

139. Bestimmen Sie alle *kritischen Punkte* (u,v) der durch

$$f(x,y) \;=\; \tfrac{1}{y} - \tfrac{1}{x} - 4x + y + 3$$

gegebenen Elementarfunktion auf ihrem natürlichen Definitionsbereich $xy \neq 0$.

140. Beschreiben Sie die (unendliche) *Menge aller kritischen Punkte* der durch

$$f(x,y) \;=\; x^3y^2(1 - x - y)$$

auf $\mathbb{R}^2$ definierten Elementarfunktion.

Aufgaben zur 10. UE-Einheit am 16. Dezember 2016

• Unter Verwendung der in den Aufgaben **137-139** gewonnenen Ergebnisse ist in den folgenden drei Aufgaben das Maximum und das Minimum der Funktion f auf dem *Normalbereich* $\mathcal{D}$ zu ermitteln.

141. $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - xy - 7y + 5 \quad ; \qquad \mathcal{D} : \ 0 \le x \le y \le 5$

142. $f(x,y) = (x^2 + 2y^2) \cdot \exp(1 - x^2 - y^2) \quad ; \qquad \mathcal{D} : \ x^2 + y^2 \le 1$

143. $f(x,y) = \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - 4x + y + 3 \quad ; \qquad \mathcal{D} : \ -2 \le x \le -\frac{1}{4}\,, \ \frac{1}{2} \le y \le 2$

144. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 - 4x^2y^2 + 6$$

auf der Ellipsenscheibe $3x^2 + 4y^2 \le 5$.

145. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = xy\,(4 - x^2 - y^2)$$

auf dem Viertelkreissektor $x^2 + y^2 \le 4\,, \ x \ge 0\,, \ y \ge 0$.

• Man bestimme das Maximum und das Minimum der linearen Funktion

$$f(x,y) = 12x - 13y + 14$$

auf dem jeweils gegebenem Normalbereich:

146.) Rechtecksbereich $[-6,8] \times [-3,9]$

147.) Parabelscheibe $0 \le x \le 1 - y^2$

148.) Ellipsenscheibe $4x^2 + 5y^2 \le 6$

149.) Hyperbelsegment $\frac{1}{x} \le y \le 8 - x \ \ (x > 0)$

150.) Linsenfläche $2^x \le y \le x + 1$

151. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = 9 + \big(y - (16 - 4x^2)\big)\big(y - (3x^2 - 12)\big)$$

auf dem durch $3x^2 - 12 \le y \le 16 - 4x^2$ festgelegten Normalbereich.

152. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) := y\,(42 - 6x^2 - 7y^2) + 8$$

auf der durch $6x^2 + 7y^2 \le 42$ und $y \ge 0$ festgelegten Halb-Ellipsenscheibe.

153. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) := xy\,(24 - 8x - 3y) + 15$$

auf der Dreiecksfläche mit den Eckpunkten $(0,0)$ und $(0,8)$ und $(3,0)$.

154. Man bestimme das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) = 4xy^3 - 5xy + 6$$

auf der Kreis**linie** $x^2 + y^2 = 4$.

Aufgaben zur 11. UE-Einheit am 13. Januar 2017

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

155. $y' = x^2/y^3 \quad ; \qquad y(0) = 2$

156. $y' = x^2 \cdot y^3 \quad ; \qquad y(0) = 3$

157. $y' = x^{5/7} y^{-3/2} \quad ; \qquad y(5) = 7$

158. $y' = x/(1-y) \quad ; \qquad y(3) = 4$

159. $y' = x\,(1-y) \quad ; \qquad y(2) = 5$

160. $y' = \sqrt{y} \quad ; \qquad y(8) = 9$

161. $y' = -\sqrt{y} \quad ; \qquad y(8) = 9$

162. $y' = y^2 \sin(-5x+3) \quad ; \qquad y(\frac{3}{5}) = \frac{1}{6}$

163. $y' = 2\,e^{3x-5y+7} \quad ; \qquad y(-2) = \frac{1}{5}$

164. $2\,y\,y' = e^{y^2} \cos(4x) \quad ; \qquad y(\frac{\pi}{8}) = 1$

165. $y' = \frac{3+x}{2+y} \quad ; \qquad y(2) = -3$

166. $y' = \frac{3+y}{2+x} \quad ; \qquad y(2) = 3$

167. $y' = \frac{\sin(2x-\frac{\pi}{2})}{y+6} \quad ; \qquad y(\pi) = -14$

168. Mottenkugeln. Das Volumen einer Mottenkugel vermindert sich mit einer zeitlichen Rate, die proportional zu der jeweils noch vorhandenen Oberfläche F ist: $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t = -\lambda F$ ($\lambda > 0$ konstant). Sei etwa r_0 der Radius einer gerade ausgelegten Mottenkugel, $r(t)$ ihr Radius nach Ablauf der Zeit t. a) Wie groß ist $r(t)$? b) Angenommen, die Mottenkugel habe nach 60 Tagen ihr halbes Gewicht verloren. Nach wieviel Tagen ist ihr Radius auf ein Zehntel seiner Anfangsgröße geschrumpft?

169. Frühstadium pflanzlichen Wachstums. $h(t)$ sei die Höhe einer Pflanze zur Zeit t. Bei vielen Pflanzen ist im *Früh*stadium ihres Wachstums die zeitliche Änderungsrate von $h(t)$ *direkt* proportional zu $h(t)$ und *umgekehrt* proportional zu t^3. Bestimmen Sie $h(t)$, wenn die Maßeinheiten so gewählt sind, daß $h(1) = 1$ ist.

170. Abkühlung. Bei einer Außentemperatur von 3°C kühlt ein Gebäude infolge Ausfalls der Heizung von anfänglich 21° ab. Nach einer Stunde beträgt die Temperatur nur mehr 16°. Wann ist die Temperatur auf 10° abgesunken?

171. Vermehrung von Fruchtfliegen. Experimentell wurde festgestellt, daß die Änderungsrate $P'(t)$ einer Fruchtfliegenpopulation $P(t)$ durch die Differentialgleichung $P' = \left(\frac{5}{P} + \frac{5}{1035-P}\right)^{-1}$ beschrieben wird, wobei die Zeit t in *Tagen* gemessen wird. Am Anfang $t = 0$ seien 10 Fruchtfliegen vorhanden. Wie viele Fliegen sind nach 12 bzw. 24 Tagen da? Zeigen Sie ferner, daß die Population ständig wächst, aber niemals mehr als 1035 Fliegen umfaßt. Bei welcher Populationsgröße P und am wievielten Tag t erreicht die Wachstumsrate $P'(t)$ ihr Maximum?

Aufgaben zur 12. UE-Einheit am 20. Januar 2017

172. Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = 4xy^2 - 3x^2y^3 + 6$ bei $(2,-1)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} \frac{12}{13} \\ -\frac{5}{13} \end{pmatrix}$.

173. Man bestimme die Richtungsableitungen der Funktion $f(x,y) = \frac{x^3 - x^5y^7}{1+x^2+y^4}$ bei $(-1,1)$ in Richtung der beiden Vektoren der Länge 1, die parallel zur 1. Mediane $y = x$ sind.

174. Der Punkt P habe die z-Koordinate 8 und liege auf der durch $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ -t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ gegebenen Raumkurve. Bestimmen Sie denjenigen Punkt Q in der x,y-Ebene, wo die Verbindungsgerade von P und Q eine Tangente an die Raumkurve ist.

175. Ein Gelände sei durch $z = x^3 - 5xy + y^2$ modelliert. Durch den Geländepunkt $P(-1,\cdot,\cdot)$ verläuft ein Weg, dessen Grundriß durch die ebene Kurve $y = \ln(1+x^2)$ gegeben ist. Berechnen Sie den *Anstieg* des Weges im Punkt P.

176. Durch $z = y^3 + x^2 - 6x + 5$ sei eine Geländefläche festgelegt. Bestimmen Sie die reelle Funktion g dergestalt, daß die Gleichung $y = g(x)$ den Grundriß der Fallinie durch den Geländepunkt $P(4,2,5)$ darstellt.

177. Im Punkt $Q(2,1,8)$ des Geländes $z = x^3 - y^2 + 1$ liegt eine Wasserquelle. Wo genau (d.h. entlang welchen Geländeweges) fließt das Wasser ins Tal?

178. Im Punkt $Q(\frac{7}{5}, \frac{1}{3}, \cdot)$ des Geländes $z = \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{5}e^{-5x+7} + 3$ liegt eine Wasserquelle. Wo genau (d.h. entlang welchen Geländeweges) fließt das Wasser ins Tal?

179. Ein ebenes Gelände ist durch die drei Punkte $A(-10,0,0)$ und $B(15,0,2)$ und $C(0,20,4)$ festgelegt. Durch den Geländepunkt $P(5,12,\cdot)$ verläuft ein elliptischer Weg, dessen Grundriß ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ ist. Bestimmen Sie den Anstieg des Weges im Punkt P.

180. Durch $z = xy^2 + x^3 - 6x + 5$ sei eine Gelände modelliert. Ermitteln Sie die Grundrißkoordinaten aller höchsten und aller tiefsten Punktes eines Geländeweges mit Anfangspunkt $A(0,\cdot,\cdot)$ und Endpunkt $B(2,\cdot,\cdot)$, dessen Grundriß der Parabelbogen $y = x^2$ $(0 \leq x \leq 2)$ ist.

181. Durch $z = 3x^2 - 2y^2 + 5xy + 7$ sei eine Gelände modelliert. Ermitteln Sie die Grundrißkoordinaten aller höchsten und aller tiefsten Punktes eines Geländeweges mit Anfangspunkt $A(1,0,\cdot)$ und Endpunkt $B(9,16,\cdot)$, dessen Grundriß eine gerade Strecke ist.

182. Es sei $\mathcal{F}$ die durch $z = (x^4 - x^3y^2)\,e^{3x-2y}$ festgelegte Raumfläche und $P(2,3,\cdot)$ ein Punkt in derselben. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene der Raumfläche $\mathcal{F}$ im Berührpunkt P.

183. Bestimmen Sie denjenigen Winkel α, wo die Richtungsableitung der Funktion f der vorigen Aufgabe im Punkt $(-1,1)$ in Richtung $\begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$ *maximal* bzw. *minimal* ist.

184. Man bestimme die Richtungsableitung der Funktion

$$f(x,y) = e^{xy-2}(x^6 + x^3y^4)^2$$

im Punkt $Q(-1,2)$ in Richtung desjenigen Vektors $\vec{e}$, der durch (positive) Drehung um den Winkel $\alpha = \pi/3$ aus dem Basisvektor $\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hervorgeht.

Aufgaben zur 13. UE-Einheit am 27. Januar 2017

185. Ermitteln Sie die Masse des durch $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 5$, $0 \le z \le 6$ festgelegten Quaders, wenn die Dichte im Quaderpunkt (x,y,z) durch xy^2z^3 gegeben ist.

186. Ermitteln Sie die Masse des durch $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$, $0 \le z \le xy$ festgelegten Körpers, wenn die Dichte im Punkt (x,y,z) durch xyz gegeben ist.

187. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts des Normalkörpers, der durch $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x^2$, $0 \le z \le xy$ festgelegt ist.

188. Im Punkt (x,y,z) des durch $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, $0 \le z \le 5$ festgelegten Quaders beträgt die Dichte $x^5y^3z^2$. Ermitteln Sie die drei Koordinaten des Schwerpunkts.

- Berechnen Sie die Masse der Kugel $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ mit der Dichte $\rho(x,y,z)$ im Punkt (x,y,z) für:

189.) $\rho(x,y,z) = \left(1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^2$

190.) $\rho(x,y,z) = \exp\left((x^2+y^2+z^2)^{3/2}\right)$

191.) $\rho(x,y,z) = 4r^2+7x^2-3y^2+5z^2$

HINWEIS: Aus Symmetriegründen gilt für die durch $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ gegebene Kugel $\mathcal{K}$
$\iiint\limits_{\mathcal{K}} x^2\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathcal{K}} y^2\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathcal{K}} z^2\,d(x,y,z)$.
Folglich gilt $\iiint\limits_{\mathcal{K}} x^2\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathcal{K}} y^2\,d(x,y,z) = \iiint\limits_{\mathcal{K}} z^2\,d(x,y,z) = \frac{1}{3}\cdot\iiint\limits_{\mathcal{K}} (x^2+y^2+z^2)\,d(x,y,z)$.

- Bestimmen Sie den Mittelpunkt des Normalbereichs $\mathcal{D}$ für:

192.) $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 \le y \le 1 \right\}$

193.) $\mathcal{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 \le y \le 2x \right\}$

Die folgenden vier Aufgaben sind alle dem Abschlußtest der VU im vorigen Wintersemester entnommen.

194. Lösen Sie das Anfangswertproblem $y' = (4x^3+5x^4)\,e^{-2y}$, $y(0)=2$ explizit. (Die Lösung y ist als Funktion in der Variablen x darzustellen!)

195. Berechnen Sie das Gebietsintegral

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} (x^2+y^2+3)^2\,d(x,y)\,,$$

wobei der Integrationsbereich $\mathcal{D}$ eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2 ist.

196. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) \;:=\; 3+(x^2-y)(y-4)$$

auf dem Normalbereich, dessen Rand sich aus der Verbindungsstrecke der Punkte $(-2,4)$ und $(2,4)$ sowie dem diese beiden Punkte verbindenden Stück der Parabel $y=x^2$ zusammensetzt.

197. Berechnen Sie das Maximum und das Minimum der Funktion

$$f(x,y) \;:=\; 5x-3y+7$$

auf der Ellipsenscheibe $3x^2+4y^2 \le 12$.

Modus der VU 835.104

Die **Vorlesungsübung Mathematik I** ist eine **Pflichtlehrveranstaltung** (3 Semesterwochenstunden, immanenter Prüfungscharakter, Anwesenheitspflicht) für die Studierenden der *Forstwirtschaft* sowie der *Holz- und Naturfasertechnologie* im ersten Semester.

Anwesenheit. Während der gesamten VU herrscht *Anwesenheitspflicht.* Jedoch wird nur in den Übungen an den Freitagen eine Anwesenheitskontrolle durchgeführt. Das Fernbleiben einer Übungseinheit ist nur aus gravierenden Gründen (Krankheit, Unfall, Prüfung, familiärer Notfall, Behördenvorladung o.ä.) gestattet und muß ehebaldigst mit einer schriftlichen Begründung (ärztliches Attest o.ä) glaubhaft entschuldigt werden.

Wer einen Freitagstermin unentschuldigt oder drei Freitagstermine insgesamt versäumt, wird von der LVA abgemeldet und bekommt kein Zeugnis.

In Härtefällen (längerer Krankenstand o.ä.) kann diese Regelung nach Rücksprache mit dem Lehrveranstaltungsleiter individuell aufgehoben werden.

Wer in einer Übungseinheit deutlich *zu spät kommt* oder *zu früh geht*, wird als *gänzlich abwesend* eingestuft.

Tafelmeldungen. Die Studierenden haben für jede Übungseinheit ein vorgeschriebenes Pensum an Aufgaben vorzubereiten. In der Regel meldet sich zu jeder Aufgabe ein Studierender *freiwillig* an die Tafel, um seine Lösung der Aufgabe mit den nötigen Erläuterungen dem Auditorium vorzuführen. Bei zufriedenstellender Tafelmeldung wird ein *Tafelpunkt* gutgeschrieben, ansonsten gibt es keinen Tafelpunkt.

Sollte die Bereitschaft zu Tafelmeldungen im Laufe des Semesters intolerabel schwinden, so können im Rahmen einer *Ausnahmeregelung* Studierende auch an die Tafel gerufen werden, wobei dann bei *negativen* Leistungen an der Tafel *Punkte* von der Gesamtpunktezahl *abgezogen* werden.

Schriftliche Tests. Zur Hälfte des Semesters wird ein *Zwischentest* (75 Minuten) und am Ende des Semesters ein *Abschlußtest* (100 Minuten) abgehalten. In beiden Tests werden *Rechenaufgaben* ähnlich den in den Übungen durchgenommenen gestellt. Die *maximale Testpunktezahl* beträgt **12** beim *Zwischentest* und **24** beim *Abschlußtest.*

Zeugnisnote. *Abschlußtestpunkte* plus *Tafelpunkte* plus *Zwischentestpunkte* ergeben die *Gesamtpunktezahl.* Ein **positiver Abschluß** der VU wird erzielt, wenn sowohl die

Abschlußtestpunktezahl mindestens 8, als auch die
Gesamtpunktezahl mindestens 18 beträgt.

Es gilt dann folgende **Notenskala**:

4 .... 18 bis 22 Punkte
3 .... 23 bis 29 Punkte
2 .... 30 bis 34 Punkte
1 .... 35 oder mehr Punkte

Nachtest. Auch wenn auf diese Weise kein positiver Abschluß der Lehrveranstaltung erreicht wurde, ist ein solcher *unter verschärften Bedingungen* mit Hilfe eines *Nachtests* am Beginn des Sommersemesters immer noch möglich. (Letzte Chance!)
Der Nachtest entspricht dem verpatzten Abschlußtest, dauert allerdings nur 90 Minuten und wird auch nicht bepunktet. Vielmehr resultiert die Zeugnisnote direkt aus den beim Nachtest erbrachten Leistungen. Der Nachtest besteht aus vier Aufgaben und gilt als *bestanden*, wenn *mindestens zwei* Aufgaben *richtig* oder *fast richtig* gelöst wurden. Bei bestandenem Nachtest ist die Zeugnisnote *Genügend* oder *Befriedigend* oder *Gut*, je nachdem, ob genau *zwei* oder *drei* oder *vier* Aufgaben *mindestens fast richtig* gelöst wurden. Im Falle, daß alle *vier* Aufgaben *völlig fehlerfrei* gelöst wurden, ist die Zeugnisnote *Sehr Gut*. Bei nicht bestandenem oder versäumtem Nachtest ist die Zeugnisnote definitiv *Nicht Genügend*.

Ersatztest. Sollte der Abschlußtest *versäumt* worden sein, so kann derselbe durch einen Ersatztest nachgeholt werden, falls die Abwesenheit *rechtzeitig* und *glaubhaft* entschuldigt wird. (Andernfalls gilt der versäumte Abschlußtest einem verpatzten gleichwertig und der Ersatztest wird als Nachtest behandelt!) Der Ersatztest entspricht völlig dem versäumten Abschlußtest und ersetzt diesen in der Notenfindung. Der Ersatztest dauert jedoch nur 90 Minuten, da er gleichzeitig mit dem Nachtest abgehalten wird. Wer dem Abschlußtest und dem Ersatztest fernbleibt, wird als abgemeldet eingestuft und bekommt *kein Zeugnis*.

Für einen *versäumten Zwischentest* wird kein Ersatztermin angeboten. (Ein etwaig reduziertes Engagement während STEOP, das einen positiven Abschluß der VU gefährden könnte, wird nicht durch das Angebot alternativer Prüfungstermine gefördert.)

Hilfsmittel bei den Tests. Beim Übungstest bzw. Nachtest bzw. Erstatztest darf das *mit eigenen Notizen versehene* Skriptum verwendet werden. Zusätzliches Material, wie Formelsammlungen o.ä., darf nicht verwendet werden, sofern dasselbe nicht in das Skriptum integriert ist. (Zulässig ist es, Kopien einer Formelsammlung auf leere Seiten des Skriptums festzukleben.) Wichtig ist, daß außer dem Angabeblatt und den Blättern, auf denen der Test geschrieben wird, und dem Skriptum und dem Studentenausweis kein Papier auf bzw. unter der Schreibfläche liegt.

Ferner darf bei den Tests ein **Taschenrechner** verwendet werden, sofern **kein Graphikdisplay** vorhanden ist und **keine Algebraprogramme** integriert sind. Somit ist es möglich, daß in der Schule verwendete Taschenrechner bei den Tests nicht zulässig sind. Da zulässige Taschenrechner sehr wenig kosten, ist diese aus Fairnessgründen aufgestellte Regelung zumutbar. Ohnehin stellt diese Regelung bereits ein außerordentliches Entgegenkommen dar, weil bei den Mathematikprüfungen anderer Studienrichtungen an der BOKU gar kein Taschenrechner zugelassen ist!

Abmeldung. Eine *aktive* Abmeldung von der VU ist nicht erforderlich. Wer mindestens drei Freitagstermine versäumt oder dem Abschlußtest und dem Ersatztest fernbleibt, wird automatisch von der LVA abgemeldet und bekommt kein Zeugnis.

Anwesenheitsprotokoll. Die Studierenden bestätigen ihre Anwesenheit während der Übungen durch Unterschrift auf dem Anwesenheitsprotokoll. Wer dabei die Unterschrift einer abwesenden Person zu fälschen beabsichtigt, möge (entsprechende Konsequenzen einrechnend) bedenken: **Unterschriftenfälschung ist eine Straftat!**

Anrechnung des Zwischentests. Wer auf den Zwischentest mindestens **6** Punkte erreicht, bekommt *auf Wunsch* ein positives Zeugnis über den **Brückenkurs Mathematik** (VO 835.091) ausgestellt. *Notenskala*:

4 .... 6 Punkte
3 .... 7 oder 8 Punkte
2 .... 9 oder 10 Punkte
1 .... 11 oder 12 Punkte

Alternativ kann ein Zeugnis über die VO 835.091 auch (bis ein Jahr nach Semesterende) mit einer mündlichen Prüfung erworben werden.

Im Gegensatz dazu wird für die VU 835.104 wegen des immanenten Prüfungscharakters der Lehrveranstaltung und der permanenten Anwesenheitspflicht, die das Fernbleiben vom Abschlußtest ohne zwingende Gründe (Krankheit o.ä.) nicht gestattet, außer dem Nachtest bzw. Ersatztest keine mündliche oder schriftliche Prüfung nach dem Ende der Lehrveranstaltung angeboten.

Aus Kostengründen bleibt der folgende mathematische FEHLER auch in der aktuellen Auflage des Skriptums NICHT BERICHTIGT!

ERRATUM:

Im SKRIPTUM auf Seite 15 ist die letzte Zeile des Abschnitts

Bei gegebenem Dreieck ABC ist also $\sphericalangle BAC = \sphericalangle CAB$ der im Eckpunkt A "liegende" Winkel, $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CBA$ der im Eckpunkt B "liegende" Winkel und $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BCA$ der im Eckpunkt C "liegende" Winkel. Stets gilt $\sphericalangle CAB + \sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA = \pi$ (Die *Winkelsumme* im Dreieck beträgt "180 Grad.") Liegen drei Punkte P, Q und R auf einer gemeinsamen Geraden, dann gilt $\sphericalangle PQR = \pi$, wenn Q zwischen P und R liegt, ansonsten gilt $\sphericalangle PQR = 0$. Ist PQR ein rechtwinkeliges Dreieck mit $\sphericalangle PQR = \frac{\pi}{2}$, sodaß also $\overline{PR}$ die Hypotenuse ist, dann haben wir

$$\frac{\left|\overline{RQ}\right|}{\left|\overline{PQ}\right|} = \tan \sphericalangle RPQ \quad , \quad \frac{\left|\overline{RQ}\right|}{\left|\overline{PR}\right|} = \cos \sphericalangle RPQ \quad , \quad \frac{\left|\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{PR}\right|} = \sin \sphericalangle RPQ \quad .$$

fehlerhaft!

KORREKT lautet die Zeile:

$$\frac{\left|\overline{RQ}\right|}{\left|\overline{PQ}\right|} = \tan \sphericalangle RPQ \quad , \quad \frac{\left|\overline{RQ}\right|}{\left|\overline{PR}\right|} = \sin \sphericalangle RPQ \quad , \quad \frac{\left|\overline{PQ}\right|}{\left|\overline{PR}\right|} = \cos \sphericalangle RPQ \quad .$$

Schneiden Sie bitte die korrekte Zeile aus und überkleben Sie damit die falsche Zeile im Skriptum!