Aufgabensammlung zur Übung

Mathematik 1 für BI

gehalten im WS 2017/18 an der TU Wien

Inhaltsverzeichnis

T Standard-Testaufgabe, welche so oder mit etwas abgeänderter Angabe bei einem der Kurz- oder Zwischentests gestellt werden könnte.

T* Test-relevante Aufgabe, die allerdings in der vorliegenden Form entweder etwas aufwändiger, länger oder schwieriger ist, als bei den Kurz- oder Zwischentest üblich.

E Ergänzungs-Aufgabe, die über den in der begleitenden Vorlesung gebrachten Stoff hinausgeht. Diese Aufgabe muss nicht notwendigerweise besonders anspruchsvoll sein (obwohl das natürlich der Fall sein kann).

B Basis-Aufgabe, die in der gestellten Form eher nicht für ein eigenes Kurz- oder Zwischentest-Beispiel geeignet ist, deren Inhalt aber beherrscht werden muss.

Logik

Übungsaufgabe 1 (B)**.** Formulieren Sie in natürlicher Sprache (d.h. ohne Verwendung mathematischer Formeln) Aussagen, die

(a) Gegenstand der Mathematik sind.

(b) normalerweise nicht Gegenstand der Mathematik sind, die aber geeignet wären, Gegenstand der Mathematik zu sein.

(c) nicht geeignet sind, Gegenstand der Mathematik zu sein.

Übungsaufgabe 2 (T)**.** Drei Personen *Blue*, *White* und *Black* machen die folgenden Aussagen[1]:

Blue sagt „White und Black sagen die Wahrheit."

White sagt „Blue sagt die Wahrheit."

Black sagt „Blue lügt und White sagt die Wahrheit."

Finden Sie mittels Aussagenlogik heraus, wer lügt und wer die Wahrheit sagt.

Übungsaufgabe 3 (T)**.** Für ein Verbrechen gibt es die drei Verdächtigen *K.*, *H.* und *G.*, sowie die folgenden Ermittlungsergebnisse:

Fakt 1: Wenn sich *H.* oder *G.* als Täter herausstellen, dann ist *K.* unschuldig.

Fakt 2: Wenn *K.* oder *G.* unschuldig sind, dann muss *H.* der Täter sein.

Fakt 3: Wenn *G.* schuldig ist, dann ist *K.* sein Mittäter.

Finden Sie mittels Aussagenlogik heraus, wer der oder die Täter sind.

Übungsaufgabe 4 (T)**.** Begründen Sie, warum die folgenden zusammengesetzten Aussagen Tautologien sind, d.h. immer wahr, unabhängig davon, welche Wahrheitswerte die vorkommenden Einzelaussagen A, B, C haben.

(a) $\neg(A \wedge \neg A)$ (Satz vom Widerspruch)

(b) $A \vee \neg A$ (tertium non datur)

(c) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \vee B)$ (erste Umschreibung der Implikation)

(d) $(A \to B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ (zweite Umschreibung der Implikation)

(e) $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ (Umschreibung der Äquivalenz)

(f) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$ (Kontraposition)

(g) $A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (erstes Distributivgesetz)

(h) $A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (zweites Distributivgesetz)

(i) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (erste de Morgan'sche Regel)

(j) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (zweite de Morgan'sche Regel)

[1] Vgl. *Ghosts* aus der „New York Trilogie" von Paul Auster.

Übungsaufgabe 5 (T)**.** Überlegen Sie, welche der folgenden Formeln allgemeingültig sind, d.h. für alle Prädikate und Belegungen wahr sind und begründen Sie Ihre Antwort. Im negativen Fall bedeutet das das Finden eines Beispiels, d.h. die Angabe konkreter $A, B, x, y, \ldots$

(a) $\neg(\forall x :\ A(x)) \ \leftrightarrow\ \exists x : \neg A(x)$ (erste de Morgan'sche Regel für Quantoren)

(b) $\neg(\forall x :\ A(x)) \ \leftrightarrow\ \exists x : \neg A(x)$ (zweite de Morgan'sche Regel für Quantoren)

(c) $(\forall x : A(x)) \vee (\forall x : B(x)) \leftrightarrow (\forall x : (A(x) \vee B(x)))$

(d) $(\exists x : A(x)) \vee (\exists x : B(x)) \leftrightarrow (\exists x : (A(x) \vee B(x)))$

(e) $(\forall x : A(x)) \wedge (\forall x : B(x)) \leftrightarrow (\forall x : (A(x) \wedge B(x))$

(f) $(\exists x : A(x)) \wedge (\exists x : B(x)) \leftrightarrow (\exists x : (A(x) \vee B(x)))$

(g) $(\forall x\, \exists y : A(x, y)) \rightarrow (\forall y\, \exists x : A(x, y))$

(h) $(\forall x\, \exists y : A(x, y)) \rightarrow (\exists y\, \forall x : A(x, y))$

(i) $(\exists x\, \forall y : A(x, y)) \rightarrow (\forall y\, \exists x : A(x, y))$

Übungsaufgabe 6 (T)**.** $A(x)$ stehe für das Prädikat „Person x schweigt", $B(x)$ für das Prädikat „Person x stimmt zu". Schreiben Sie mittels logischer Symbole und Quantoren jeweils eine Formel an, die der angegebenen sprachlichen Formulierung möglichst gut entspricht.

(a) Wer schweigt, stimmt zu.

(b) Es gibt jemanden der schweigt, aber trotzdem widerspricht.

(c) Jeder der zugestimmt hat, hat geschwiegen.

(d) Niemand der gesprochen hat, hat zugestimmt.

Entscheiden Sie welche dieser Aussagen (a) widersprechen, sowie welche Aussagen zu (d) äquivalent sind!

Übungsaufgabe 7 (T)**.** Sind die folgenden Formeln wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $\exists x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x > y$

(b) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x > y$

(c) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N} :\ x > y$

(d) $\forall x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N} :\ x > y$

Übungsaufgabe 8 (T*)**.** Ersetzen Sie in Aufgabe 7 das Symbol $>$ durch das Symbol

(a) $\geq$ (b) $<$ (c) $\leq$ (d) $=$ (e) $\neq$ (f) $|$ (teilt)

Übungsaufgabe 9 (T*)**.** Ersetzen Sie in den Formeln von Aufgabe 7 und 8 das Symbol $\mathbb{N}$ durch $\mathbb{Z}$.

Übungsaufgabe 10 (T)**.** Sind die folgenden Formeln wahr oder falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x = y^2$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x^2 = y$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ y^2 < x$

(d) $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} :\ x < y^2$

Übungsaufgabe 11 (T)**.** Ersetzen Sie in den ersten beiden Formeln von Aufgabe 10 $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ und in den letzten beiden Formeln $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$.

Übungsaufgabe 12 (T)**.** Für natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ gibt es den Begriff der Teilbarkeit: Wir schreiben $n|m$, wenn die natürliche Zahl n die natürliche Zahl m teilt, d.h. wenn es eine natürliche Zahl k gibt mit $m = nk$. Betrachten Sie für $n, m \in \mathbb{N}$ die folgenden Aussagen:

(a) $n|m$ dann und nur dann, wenn der Bruch $\frac{m}{n}$ eine natürliche Zahl ist.

(b) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es mindestens einen Teiler.

(c) Wenn $n|m$, dann auch $n|(m^2)$

(d) Wenn $2|(nm)$, dann $2|n$ oder $2|m$.

Schreiben Sie diese Aussagen als Formeln, d.h. mit Quantoren und Implikationen an und überzeugen Sie sich (und gegebenenfalls Ihre/n ÜbungsleiterIn) von deren Korrektheit.

Übungsaufgabe 13 (T)**.** Schreiben Sie die Negationen der Aussagen aus Übungsaufgabe 12 zuerst in Alltagssprache und dann als mathematische Formeln an.

Achtung: Da die ursprünglichen Aussagen wahr sind, sind ihre Negationen falsch. In dieser Aufgabe sollen Sie diese (falschen Aussagen) natürlich nicht beweisen, sondern lediglich formulieren!

Übungsaufgabe 14. (P) Welche der folgenden Mengen sind mit $\{0, 1\}$ identisch?

(a) $\{1, 0\}$ (b) $\{10\}$ (c) $\{1, 0, 0\}$
(d) $\{\{0\}, \{1\}\}$ (e) $\{0, 1, \{\}\}$ (f) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\}$

Übungsaufgabe 15 (T)**.** Untersuchen Sie, ob die nachfolgenden Gleichungen für alle Mengen $A, B, C, \ldots$, A_i $(i \in I)$, B_j $(j \in J)$ gelten. Stets ist eine Begründung zu geben; lautet die Antwort *nein*, dann in Form eines Gegenbeispiels.

(a) $A \cap B = B \cap A$ (b) $A \setminus B = B \setminus A$
(c) $A \triangle B = B \triangle A$ (d) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ (f) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(g) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)$
(h) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J}(A_i \cap B_j)$

Hinweis: Oft lassen sich die Mengengleichungen in logische Beziehungen zwischen Aussagen der Form $x \in A$, $x \in B$ etc. umformulieren.

Übungsaufgabe 16 (B)**.** Erklären Sie die Gültigkeit der Mengengleichheiten

$$A \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A_i \times B) \quad \text{und} \quad A \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B).$$

Operationen und Abbildungen

Übungsaufgabe 17 (T)**.** Viele aus der Schule bekannte Verknüpfungen und Operationen sind assoziative Relationen, d.h. $a\star(b\star c) = (a\star b)\star c$. Dabei bezeichnet $\star$ die fragliche Verknüpfung. Eine weitere interessante Eigenschaft ist die Kommutativität, d.h. die Gültigkeit von $a \star b = b \star a$. Untersuchen Sie folgende Beispiele auf Assoziativität und Kommutativität:

(a) Exponentiation: $a \star b := a^b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

(b) Größter gemeinsamer Teiler: $n \star m := \operatorname{ggT}(n, m)$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

(c) Kleinstes gemeinsames Vielfaches: $n \star m := \mathrm{kgV}(n, m)$ mit $n, m \in \mathbb{N}$.

(d) Kreuz- oder Vektorprodukt: $\mathbf{x} \star \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$, für Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$

Geben Sie jeweils ein Gegenbeispiel an, falls eine Eigenschaft verletzt ist.

Übungsaufgabe 18 (B)**.** Auf einer beliebigen Menge $\mathcal{M}$ von Mengen, kann man die Teilmengenbeziehung $\subseteq$ auch als Relation, d.h. als Menge R von Paaren auffassen. Tun Sie das für die Menge aller Teilmengen von $\{1, 2, 3\}$, indem Sie alle Elemente von R angeben.

Hinweis: Erstellen Sie eine passende 8×8 Tabelle.

Übungsaufgabe 19 (T)**.** Durch welche der folgenden Vorschriften wird eine Funktion definiert? Falls eine Funktion vorliegt, entscheiden Sie, ob diese injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

(a) f : {Studierende der TU Wien} $\to \mathbb{N}$ und $f(x) =$ Matrikelnummer von x.

(b) f : {Studierende der TU Wien} $\to \{A, B, AB, 0\}$ und $f(x) =$ Blutgruppe von x.

(c) f : {Noten in der Partitur von Beethovens 9. Symphonie} $\to \{d, e, f, g, a, b, c\}$ und $f(x) =$ Tonname von x.

(d) f : {Einwohner von Österreich} $\to$ {Vornamen} und $f(x) =$ Vorname von x.

(e) f : {Einwohner von Österreich} $\to$ {Vornamen} und $f(x) =$ Vorname der biologischen Mutter von x.

(f) f : {Elemente des Periodensystems} $\to \mathbb{N}$ und $f(x) =$ Ordnungszahl von x.

(g) f : {Elemente des Periodensystems} $\to \mathbb{N}$ und $f(x) =$ Massenzahl von x.

Übungsaufgabe 20 (T)**.** Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Wie viele Abbildungen $f : A \to A$ gibt es? Welche davon sind injektiv, surjektiv, bijektiv? Geben Sie die Umkehrabbildungen $f^{(-1)}$ aller bijektiven $f : A \to A$ an.

Übungsaufgabe 21 (B)**.** Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ irgendwelche Abbildungen und $h := g \circ f$, also $h(a) := g(f(a))$. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g injektiv, so auch h.

(b) Sind f und g surjektiv, so auch h.

(c) Sind f und g bijektiv, so auch h.

Übungsaufgabe 22 (B)**.** Seien wieder $f : A \to B$ und $g : B \to C$ irgendwelche Abbildungen und $h := g \circ f$.

(a) Sei h injektiv. Folgt daraus auch die Injektivität von f oder von g?

(b) Sei h surjektiv. Folgt daraus auch die Surjektivität von f oder von g?

(c) Sei h bijektiv. Folgt daraus auch die Bijektivität von f oder von g?

Begründung Sie jeweils Ihre Antwort (im negativen Fall ist ein Gegenbeispiel anzugeben).

Zahlbereiche

Übungsaufgabe 23 (E)**.** In dieser Aufgabe greifen wir nochmals auf die aus der Schule wohlbekannten Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zurück. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}$ aller ganzen Zahlen ist abzählbar. *Hinweis:* Beginnen Sie mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ etc.

(b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. *Hinweis:* Beginnen Sie bei der Abzählung mit den Paaren $(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 0), \ldots$. Beschreiben Sie sorgfältig wie Sie fortsetzen.

(c) Für jede abzählbare Menge A ist auch $A \times A$ abzählbar ist. Hinweis: Verwenden Sie Aussage (b).

(d) Die Menge $\mathbb{Q}$ aller rationalen Zahlen ist abzählbar. *Hinweis:* Jede rationale Zahl lässt sich als Bruch (Paar) ganzer Zahlen deuten.

(e) Die Menge M aller unendlichen 0-1-Folgen ist überabzählbar. *Hinweis:* Formal ist M die Menge aller Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$, $n \mapsto a_n$, für die wir aber gewohnheitsmäßig lieber $f = \mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots)$ schreiben.

Nehmen Sie an, es gäbe eine Abzählung von M, d.h. eine Folge von Folgen $\mathbf{a}^{(k)} = (a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots)$, $k \in \mathbb{N}$, die ganz M durchläuft. Man erhält einen Widerspruch, indem man eine 0-1-Folge $(b_0, b_1, \ldots)$ konstruiert, die sicher nicht in der Abzählung vorkommt, weil sie sich im nullten Glied von der nullten Folge unterscheidet (d.h. $b_0 \neq a_0^{(0)}$), im ersten Glied von der ersten (d.h. $b_1 \neq a_1^{(1)}$) und so weiter[2].

(f) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar. Hinweis: Gäbe es eine Abzählung von $\mathbb{R}$, so auch eine der Teilmenge aller reellen Zahlen, in deren unendlicher Dezimalentwicklung nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen. Das ist aber wegen Aussage (e) unmöglich.

Übungsaufgabe 24 (E)**.** Ist es möglich bzw. sinnvoll ggT und kgV auch von unendlich vielen natürlichen Zahlen zu bilden?

Übungsaufgabe 25 (T)**.** Ein einfaches Getriebe besteht aus zwei Zahnrädern mit N_a bzw. N_b Zähnen. Berechnen Sie nach wie vielen (vollen!) Umdrehungen ein Zahn des ersten Rades wieder in dieselbe Stelle des zweiten Rades greift.

(a) $N_a = 50, N_b = 28$ (b) $N_a = 52, N_b = 28$ (c) $N_a = 53, N_b = 11$

Übungsaufgabe 26 (T)**.** Wie Aufgabe 25, nur seien nun die beiden Zahnräder über eine Kette mit $N_k = 110$ Gliedern verbunden. Berechnen Sie nach wie vielen (vollen!) Umdrehungen ein Kettenglied wieder in denselben Zahn des ersten Rades greift.

Übungsaufgabe 27 (E)**.** Beschreiben Sie möglichst genau den Additionsalgorithmus für natürliche Zahlen, wie sie ihn in der Volksschule gelernt haben. Tun Sie es, weil es etwas weniger Aufwand erfordert, in Bezug auf die binäre (und nicht die dekadische) Darstellung. Die Aufgabe besteht also im Folgenden: Seien

$$m = \sum_{i=0}^{k} a_i 2^i, \quad n = \sum_{i=0}^{k} b_i 2^i, \quad m + n = \sum_{i=0}^{k+1} c_i 2^i$$

mit $a_i, b_i, c_i \in \{0, 1\}$. Beschreiben Sie das Verfahren, mit Hilfe dessen man die c_i aus den a_i und b_i gewinnt.

[2] Mehr dazu finden Sie auf Wikipedia unter dem Stichwort „Cantor'sches Diagonalverfahren"

Übungsaufgabe 28 (B)**.** Wandeln Sie von dekadischer in binäre Darstellung um bzw. vice versa.

(a) Dekadisch: $9, 10, 42, 259$ (b) Binär: $10, 111, 1000, 11001100$

Übungsaufgabe 29 (T)**.** Schätzen Sie ab, wie viele Stellen die angegebenen Zahlen in Dezimaldarstellung haben:

(a) $\dfrac{10^{(3^2)}10^{-4}10^6}{100^3(10^3)^{-2}}$, (b) $\dfrac{2^{(10^3)}5^3 10^5}{(100^{-3})^{-2}(30^2)^2}$, (c) $\dfrac{2^{(2^4)}5^3 10^{-5}}{(10000^5)^{-2}2^8}$.

Hinweis: $2^{10} = 1024 \approx 10^3$

Übungsaufgabe 30 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 29, aber mit den Stellen in der Binärdarstellung.

Übungsaufgabe 31 (E)**.** Zeigen Sie, dass $\sqrt{3}$ irrational ist.

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$, achten Sie aber sorgfältig auf die Unterschiede und darauf, was sie in Ihrer Argumentation verwenden.

Übungsaufgabe 32 (E)**.** Ergänzen und beweisen Sie folgende Formel

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \dots$$

Übungsaufgabe 33 (T)**.** Bestimmen Sie, wie viele natürliche Zahlen von 1 bis 600 durch mindestens eine der Zahlen (a) 2, 3 oder 12 (b) 3, 5 oder 8 (c) 6, 8 oder 14 teilbar sind.

Übungsaufgabe 34 (B)**.** Welche Endziffern (in der Dezimaldarstellung) von $n!$ können auftreten?

Übungsaufgabe 35 (B)**.** Wählen Sie ein konkretes $x \in \mathbb{R}$ und konkrete Zahlen $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$. Zeichnen Sie die Mengen $\{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon_1\}$ und $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ auf der Zahlengeraden ein.

Übungsaufgabe 36 (B)**.** Geben Sie sich drei verschiedene und nicht leere Intervalle $A := (a_1, b_1]$, $B = (a_2, b_2)$ und $C = [a_3, b_3]$ mit konkreten Randpunkten $a_1 < b_1, a_2 < b_2, a_3 < b_3 \in \mathbb{R}$ vor. Bestimmen Sie die Mengen

$$A^{\mathsf{C}}, \quad B^{\mathsf{C}}, \quad C^{\mathsf{C}}, \quad A \cap (B \cup C), \quad A \cup (B \cap C), \quad A \setminus C, \quad B \triangle C, \quad ((A \setminus B) \cap C) \cup A$$

und schreiben Sie diese als Intervall bzw. als Vereinigung von Intervallen an.

Bemerkung: A^{C} ist das Komplement von A, hier relativ in Bezug auf $\mathbb{R}$; $B \triangle C$ ist die symmetrische Differenz von B und C.

Übungsaufgabe 37 (B)**.** Wählen Sie ein konkretes $a > 0$ und zeichnen Sie die beiden Mengen $\{x : x < a\}$ und $\{x : x^2 < a^2\}$ auf der Zahlengeraden ein. Ist eine der beiden Mengen in der anderen enthalten? Wiederholen Sie die Vorgehensweise mit $-a$ anstelle von a.

Übungsaufgabe 38 (E)**.** Zeigen Sie mit Hilfe der Axiome für $\mathbb{R}$, dass dort (wie in jedem Körper) die folgenden beiden Kürzungsregeln gelten:

(a) Aus $a + x = a + y$ folgt $x = y$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}$).

(b) Ist $a \neq 0$, so folgt $x = y$ auch aus $ax = ay$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}$).

Übungsaufgabe 39 (E)**.** Überlegen Sie sich allein mit Hilfe der Axiome (insbesondere der Monotoniegesetze), dass in $\mathbb{R}$ (wie in jedem angeordneten Körper) für alle $a \in \mathbb{R}$ stets $a^2 \geq 0$ gilt, Quadrate also nie negativ sein können. Schließen Sie daraus auch $0 < 1$ und damit weiter, dass $\mathbb{C}$ mit dem Element i, welches $i^2 = -1$ erfüllt, nicht zu einem angeordneten Körper gemacht werden kann.

Hinweis: Verwenden Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ stets $a \geq 0$ oder $-a \geq 0$ gilt, das Monotoniegesetz für die Multiplikation und die etwas weiter oben bewiesene Rechenregel $(-a)(-b) = ab$ für $b = a$.

Übungsaufgabe 40 (T)**.** Entscheiden Sie direkt und ohne Verwendung von Rechenhilfen, welche der beiden reellen Zahlen größer ist:

(a) $\sqrt{7}+\sqrt{11}$ oder $\sqrt{8}+\sqrt{10}$
(b) 42 oder $\sqrt{17^2+25^2}$
(c) $\log_{10} 1000$ oder $\log_{10} 500 + \log_{10} 500$
(d) $\sin(3{,}14)+\sin(3{,}15)$ oder 0
(e) $\cos(3{,}14)-\cos(3{,}15)$ oder 0
(f) $\sin(1)$ oder $\cos(1)$

Hinweis: Die Argumente der trigonometrischen Funktionen sind im Bogenmaß angegeben.

Übungsaufgabe 41 (B)**.** Zeigen Sie mit Hilfe der Axiome für $\mathbb{R}$ (oder ganz allgemein für einen angeordneten Körper), dass folgende Rechenregeln für Ungleichungen gelten.

(a) Für $x,y>0$ gilt: $x \geq y \Leftrightarrow -x \leq -y$.

(b) Für $x,y>0$ gilt: $x \geq y \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$.

Übungsaufgabe 42 (T)**.** Bestimmen Sie für folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils alle oberen Schranken und geben Sie, sofern vorhanden, das Supremum an.

(a) $\left\{1+\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\}$

(b) $\left\{\frac{n}{m} :\ m,n \in \mathbb{N},\ 0<n<m\right\}$

(c) $\{x \in \mathbb{Q} :\ x^2 \leq 3\}$

Übungsaufgabe 43 (T)**.** Wie Aufgabe 42, aber mit unteren Schranken und Infimum.

Übungsaufgabe 44 (E)**.** Überlegen Sie sich, dass die Menge $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ sowohl nach oben als auch nach unten unbeschränkt ist. Dabei sollen Sie nur bereits Bewiesenes verwenden.

Übungsaufgabe 45 (B)**.** Begründen Sie die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x|+|y|$ für beliebige reelle Zahlen durch geeignete Fallunterscheidung an x und y.

Übungsaufgabe 46 (T)**.** Lösen Sie Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen und fertigen Sie jeweils eine Skizze an.

(a) $|x|^2-2x-3=0$ (b) $x^2-2|x|-3=0$ (c) $|x^2-2x-3|=1$

Übungsaufgabe 47 (T)**.**

(a) Berechnen Sie alle Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2-4x+3=0$:

(b) Machen Sie die Probe für Ihre Lösungen aus (a). Dokumentieren Sie dabei alle Ihre Rechenschritte:

(c) Geben Sie die Lösungsmenge der quadratischen Ungleichung $-x^2+4x-3<0$ in Intervall-Schreibweise an.

(d) Fertigen Sie eine saubere und aussagekräftige Skizze an, welche Ihre Resultate illustriert.

Übungsaufgabe 48 (T)**.** Wie Aufgabe 47, aber mit $x^2+2x-3=0$.

Übungsaufgabe 49 (T)**.** Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen und Ungleichungen:

(a) $2x^2+6x-8=0$ und $2x^2+6x-8<0$.

(b) $x^2-2|x|-3=0$ und $x^2-2|x|-3 \geq 0$.

Fertigen Sie jeweils eine aussagekräftige Skizze an, aus der man Nullstellen und Vorzeichen der entsprechenden Terme ablesen kann.

Übungsaufgabe 50 (T)**.** Bestimmen Sie die Lösungsmenge über $\mathbb{R}$, d.h. die Menge aller reellen x, welche die Ungleichung $\frac{4}{|x-2|} < 2 + 3x$ erfüllen.

Übungsaufgabe 51 (T)**.** Wie Aufgabe 50 für die Ungleichung $\sqrt{|x+2|} \leq |x+1|$.

Übungsaufgabe 52 (T)**.** Wie Aufgabe 50 für die Ungleichung $\frac{|1+x|}{1+|1+x|} \leq \frac{1}{2} + \frac{|x|}{1+|x|}$.

Übungsaufgabe 53 (B)**.** Begründen Sie die folgenden Rechenregeln für Potenzen und Wurzeln reeller Zahlen ($0 \leq a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$):

(a) $a^{m+n} = a^m a^n$ (b) $(ab)^n = a^n b^n$ (c) $(a^m)^n = a^{mn}$
(d) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ (e) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Übungsaufgabe 54 (T)**.** Zeigen Sie direkt mithilfe des Binomischen Lehrsatzes:

(a) $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, für $n \geq 0$ (b) $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$, für $n \geq 0$

Übungsaufgabe 55. Wie Aufgabe 54 für $(1+x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4}x^2$ mit $n \geq 2$ und $x \geq 0$.

Vollständige Induktion

Übungsaufgabe 56 (B)**.** Man kann das Induktionsprinzip auch als **Dominoeffekt** verstehen: Fällt der erste Stein und ist sichergestellt, dass jeder fallende Stein seinen Nachfolger mitreißt, so fällt jeder Stein. Begründen Sie das mit Hilfe des Induktionsprinzips. Was entspricht dabei der Aussage $A(n)$? Und welche Annahme über die Aufstellung der Dominosteine muss man dabei machen?

Übungsaufgabe 57 (T)**.** Stellen Sie sich eine quadratische Fläche mit einem Schachbrettmuster mit 2^n dm Seitenlänge vor. Jedes Feld des Musters ist ein Quadrat von 1 dm Seitenlänge. Die Gesamtfläche soll mit L-förmigen Platten gepflastert werden, von denen jede genau drei Felder des Schachbrettmusters überdeckt[3]. Die langen Seiten einer jeden solchen Platte sind also jeweils 2 dm lang, die kurzen 1 dm. Innerhalb der Fläche steht auf einem der quadratischem 1×1 dm^2-Felder ein Pfeiler (dieser Bereich muss also nicht gepflastert werden). Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ so eine Pflasterung möglich ist.

Hinweis: Zerlegen Sie beim Induktionsschritt das Quadrat in vier kleinere Quadrate und verwenden Sie eine L-förmige Platte in der Mitte, um auf jene drei der Quadrate, in denen nicht der Pfeiler steht, die Induktionsannahme anwenden zu können.

Übungsaufgabe 58 (T)**.** Schreiben Sie die folgenden Terme mithilfe des Summensymbols $\sum$ an und erklären Sie Ihre Vorgehensweise:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + 99 + 101$
(b) $1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + 10^4$ (c) $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots + 101$
(d) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$ (e) $\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$

[3]Werfen Sie bei Gelegenheit einen Blick auf die Pflasterung der Bahnsteige der Wiener (S)-Bahnhöfe

Übungsaufgabe 59 (T)**.** Schreiben Sie die folgenden Terme mithilfe des Produktsymbols $\prod$ an und erklären Sie Ihre Vorgehensweise:

(a) $2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 12 \cdot \ldots \cdot 100$
(b) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{100}$
(c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{9}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n+1}$
(d) $2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (n^2+1)$
(e) $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$
(f) $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} \cdot \ldots$

Übungsaufgabe 60 (T)**.** (a) Schreiben Sie folgende Behauptung als Formel (möglichst mit Summensymbol) an: *„Die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis $2n$ kann berechnet werden, indem man die Anzahl der geraden Zahlen von 2 bis $2n$ mit $n+1$ multiplizert.“*

(b) Führen Sie den Induktionstart des Induktionsbeweises für die Aussage aus (a). durch.

(c) Führen Sie den Induktionsschritt des Induktionsbeweises durch.

(d) Markieren Sie jene Stelle Ihres Induktionsbeweises, an der Sie die Induktionsvoraussetzung verwendet haben.

Übungsaufgabe 61 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 60, aber mit: *„Die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ kann auch berechnet werden, indem man die Anzahl der ungeraden Zahlen von 1 bis $2n-1$ mit n multipliziert.“*

Übungsaufgabe 62 (T)**.** Beweisen Sie die Summenformel für die geometrische Reihe mit Induktion. Kennzeichnen Sie dabei sorgfältig Induktionsanfang, -annahme, -schritt und -behauptung.

Übungsaufgabe 63 (T)**.** Berechnen Sie für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ folgende Summen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} 1$ (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n$ (c) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$ (d) $\sum_{k=1}^{n} (-3)^k$ (e) $\sum_{k=2}^{n} (-1)^k$ (f) $\sum_{k=n}^{2n} 2^{-k}$

Übungsaufgabe 64 (T)**.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für allgemeines $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Übungsaufgabe 65 (T)**.** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion für allgemeines $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass beide Summationsgrenzen auf der linken Seite von n abhängen.

Übungsaufgabe 66 (T)**.** Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n = 2, 3, \ldots$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} (n+k)(n-k) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Hinweis: Beachten Sie dass die Summanden auf der linken Seite auch von n abhängen.

Übungsaufgabe 67 (T)**.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n = 2, 3, \ldots$ gilt

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{1}{n!}.$$

Übungsaufgabe 68 (T)**.** Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die natürliche Zahl $n^3 + 2n$ durch 3 teilbar ist.

Hinweis: Schreiben Sie zuerst die zu beweisende Aussage als Formel an, vgl. Aufgabe 12.

Übungsaufgabe 69 (T)**.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für hinreichend große[4] $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n < 2^n$.

Übungsaufgabe 70 (T)**.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für hinreichend große natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ stets $n^2 < 2^n$ gilt.

Übungsaufgabe 71 (T)**.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: Für beliebige Konstanten $a, b > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ groß genug gilt $n^2 \geq an + b$. Beschreiben Sie graphisch und verbal, wie sich diese Ungleichung interpretieren läßt!

Hinweis: $n \geq a + b + 1$ ist eine gute Wahl.

Übungsaufgabe 72 (T)**.** Die Anzahl der Teile, in die man eine Kreisfläche durch n Geraden (gerade Schnitte) zerlegen kann, kann die Zahl $\dfrac{n^2 + n + 2}{2}$ nie übersteigen.

Hinweis: überlegen Sie zuerst, wie viele alte Schnitte ein neuer Schnitt höchstens kreuzen kann. Wie viele neue Teile entstehen daher maximal?

Übungsaufgabe 73 (T)**.** Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n! > 2^n$ für alle $n = 4, 5, 6, \ldots$

Übungsaufgabe 74. (P) Finden Sie eine positive reelle Zahl c_k, von der Sie zeigen können: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$c_k n^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k.$$

Hinweis: Stünde an dieser Stelle schon der Begriff des Grenzwertes zur Verfügung ließe sich stärker zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} n^{-k} = \frac{1}{k!}$$

Diesen Hinweis sollen Sie in Ihrem Beweis hier allerdings noch nicht verwenden. Er kann aber zur Kontrolle dienen.

Übungsaufgabe 75 (E)**.** Beweisen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, indem Sie sich überlegen, dass es zu jeder endlichen Menge von Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ die Zahl $n := p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$ durch keines der p_i teilbar ist, daher[5] …

Folgen

Übungsaufgabe 76 (T)**.** Untersuchen Sie die Folge $a_n = \frac{n!}{n^n}$ auf Periodizität, Monotonie, Alterniertheit und Beschränktheit.

Übungsaufgabe 77 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 76, aber für die Folgen

(a) $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ (b) $b_n = \sin\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$ (c) $c_n = n\cos\left(\frac{n}{\pi}\right)$

[4] „Hinreichend groß" bedeutet, dass es eine Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, ab der die Behauptung gilt. Eine andere, etwas gewöhnungsbedürftige Sprechweise ist zu sagen, die Behauptung gelte für „fast alle" natürliche Zahlen, oder gar „fast immer".

[5] Sie treten mit diesen Überlegungen in die Fußstapfen des Euklid von Alexandria, der dieselben Gedanken im 3. Jhdt. v. Chr. hatte.

Übungsaufgabe 78 (E)**.** Fertigen Sie eine 5×5 Tabelle für die fünf Eigenschaften *beschränkt, monoton wachsend, monoton fallend, alternierend* und *periodisch* an. Jedes der 25 Felder entspricht einem Paar (E_1, E_2) von Eigenschaften aus dieser 5-elementigen Menge. Uns interessieren nur die 10 Felder unter der Diagonale (warum?). Für jedes Feld (E_1, E_2) stellen sich vier Fragen:

(a) Gibt es reelle Folgen mit beiden Eigenschaften E_1 und E_2?

(b) Gibt es reelle Folgen mit Eigenschaft E_1 aber ohne Eigenschaft E_2?

(c) Gibt es reelle Folgen mit Eigenschaft E_2 aber ohne Eigenschaft E_1?

(d) Gibt es reelle Folgen, die weder die Eigenschaft E_1 noch die Eigenschaft E_2 haben?

Lautet die Antwort zu einer solchen Frage *ja*, so ist so eine Folge anzugeben; bei *nein* ist dies zu begründen. Behandeln Sie alle oder wenigstens einige interessante der 10 Felder (Kombinationen) in der beschriebenen Weise.

Übungsaufgabe 79 (E)**.** Testen Sie anhand verschiedener Startwerte (wenigstens mit einem $a < 1$ und einem $a > 1$ das Verhalten der Folge

$$a_0 = a \quad \text{und} \quad a_{n+1} = T(a_n) \quad \text{für} \quad n \geq 0,$$

wobei $T : x \mapsto \sqrt{x}$. Versuchen Sie Ihre Erkenntnisse zu begründen.

Übungsaufgabe 80 (E)**.** Analog Aufgabe 79 mit der Transformation $T(x) := 1 - \frac{x}{2}$.

Übungsaufgabe 81 (E)**.** Analog Aufgabe 79, aber mit der Transformation $T(x) = \sqrt{x - \frac{1}{4}}$ und den Startwerten $a_0 = \frac{1}{2}$ bzw. $a_0 = 2$.

Übungsaufgabe 82 (E)**.** Untersuchen Sie die rekursiv definierte Folge auf Konvergenz:

$$a_0 := 2, \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} := \frac{3}{4 - a_n} \qquad \text{für } n \geq 1.$$

Übungsaufgabe 83 (E)**.** Wie Übungsaufgabe 82 aber mit den Startwerten $a_0{=}0$ bzw. $a_0 = 5$.

Übungsaufgabe 84 (E)**.** Während die vorigen Aufgaben sogenannten eingliedrigen Rekursionen behandelt haben, gibt es auch mehrgliedrige Rekursionen. Ein berühmtes Beispiel einer zweigliedrigen Folge sind die sogenannten Fibonacci-Zahlen[6]:

Sie beginnen mit den beiden Werten $F_0 = F_1 := 1$ und folgen der zweigliedrigen Rekursion $F_{n+1} := F_{n-1} + F_n$. Berechnen Sie einige Glieder der Folge, bis Sie eine wohlbegründete Vermutung über die Größenordnung des Wachstums der Glieder F_n aufstellen können. Zur Auswahl stehen zum Beispiel lineares Wachstum $F_n \approx kn + d$ (k und d geeignete reelle Zahlen), quadratisches Wachstum $F_n \approx n^2$, Wachstum mit einer höheren k-ten Potenz $F_n \approx n^k$, exponentielles Wachstum $F_n \approx a^n$ ($a \in \mathbb{R}$ geeignet), superexponentielles Wachstum wie z.B. $F_n \approx a^{n^2}$. Versuchen Sie Ihre Vermutung so weit wie möglich zu präzisieren und zu begründen. (Hier wird keine perfekte Antwort erwartet, sondern dass Sie sich eigenständige und sinnvolle, d.h. nicht völlig falsche Gedanken gemacht haben.)

[6] nach dem italienischen Mathematiker Leonardo Fibonacci (um 1170 bis nach 1240), der damit die Population sich von Generation zu Generation vermehrender Kaninchen beschrieb

Übungsaufgabe 85 (T)**.** Schreiben Sie die Aussage, dass eine reelle Folge (a_n) divergiert, als Formel mit Quantoren an, ohne das Negationssymbol $\neg$ zu verwenden. Unterscheiden Sie dabei zwei verschiedene Aussagen:

(a) Die Folge der a_n konvergiert nicht gegen ein bestimmtes $x \in \mathbb{R}$.

(b) Die Folge der a_n divergiert.

Übungsaufgabe 86 (T)**.** Verwenden Sie die mathematisch präzise Definition des Grenzwerts, um zu zeigen, dass die Folge

$$x_n = \frac{1-n}{1+n}$$

gegen den Grenzwert $x = -1$ konvergiert. Bestimmen Sie für $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ und $\varepsilon = \frac{1}{100}$ jeweils die kleinste Zahl $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt.

Übungsaufgabe 87 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 86, aber mit $x_n = \frac{2n^3}{n^3+n}$ und dem Grenzwert $x = 2$.

Übungsaufgabe 88 (T)**.** Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $a_n = (-1)^n \cdot (-n+2)^3$

(b) $b_n = \dfrac{2n^2+n}{n-1} - \dfrac{2n^2}{n+2}$

(c) $c_n = \dfrac{\big(1+(-1)^n\big)n + n^2}{(n+1)^2}$

(d) $d_n = \dfrac{\big((-1)^n \cdot n + 4\big)n}{n^2+1}$

Übungsaufgabe 89 (T)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte, falls vorhanden:

(a) $a_n = \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}$

(b) $b_n = \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})$

(c) $c_n = n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

(d) $d_n = \dfrac{\sqrt{n}\sin(n)}{n+1}$

(e) $e_n = \dfrac{(3n+1)^2 + \sin^2(\sqrt{n})}{n^2}$

(f) $f_n = \sqrt[n]{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Übungsaufgabe 90 (T)**.** Berechnen Sie die Grenzwerte, falls vorhanden:

(a) $a_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1\right)$

(b) $b_n = n\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Übungsaufgabe 91 (T)**.** Berechnen Sie unter Verwendung von $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ die Grenzwerte, falls vorhanden:

(a) $a_n = \frac{(n+1)^{2n+1}(n-1)}{n^{2n+1}(n+2)}$

(b) $b_n = \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n^2+n}$

(c) $c_n = \left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{2n}$

Übungsaufgabe 92 (T*)**.** Geben Sie eine Folge mit paarweise verschiedenen Gliedern a_n an, für die gilt:

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\} < \liminf_{n\to\infty} a_n < \limsup_{n\to\infty} a_n < \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Dabei bezeichnet lim inf das Infimum aller Grenzwerte von konvergenzen Teilfolgen und lim sup das Supremum aller Grenzwerte von konvergenten Teilfolgen

Übungsaufgabe 93 (T)**.** Sei $r \in \mathbb{R}$ eine vorgegebene reelle Zahl.

(a) Geben Sie zwei Folgen mit Gliedern $a_n \to \infty$ bzw. $b_n \to \infty$ an, so dass für die Differenzen $d_n := a_n - b_n$ gilt: (i) $d_n \to -\infty$ (ii) $d_n \to r$ (iii) $d_n \to \infty$.

(b) Analog für die Quotienten $q_n := \frac{a_n}{b_n}$ statt der Differenzen d_n.

(c) Wie Teilaufgabe (a), nur mit $a_n \to 0$ und $b_n \to 0$.

(d) Wie Teilaufgabe (c), nur mit den Quotienten q_n aus Teil (b) statt der Differenzen d_n.

Übungsaufgabe 94 (T)**.** Gibt es reelle Folgen mit Gliedern a_n bzw. b_n, wo zwar die Summen $a_n + b_n$ und Produkte $a_n b_n$ konvergieren, nicht aber die a_n und die b_n selbst? Wenn ja, geben Sie ein Beispiel, wenn nein, begründen Sie dies.

Übungsaufgabe 95 (T)**.** Finden Sie konkrete Beispiele für folgende Situationen:

(a) Zwei verschiedene Folgen a_n und b_n, welche gegen 95 konvergieren und zusätzlich $a_n > b_n > 95$ für alle Folgenglieder erfüllen.

(b) Drei verschiedene Folgen, welche divergieren, obwohl unendlich viele Folgenglieder gleich 0 sind.

(c) Eine divergente Folge a_n, welche sich der reellen Zahl 95 immer weiter annähert (d.h. die Folge $|a_n - 95|$ ist streng monoton fallend). Was lässt sich hier über das Konvergenzverhalten von $|a_n - 95|$ sagen?

(d) Eine divergente Folge a_n an, für welche $|a_n|$ gegen 95 konvergiert.

Übungsaufgabe 96 (T)**.** Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antwort bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel, wenn die Aussage falsch ist.

(a) In jedem (noch so kleinen) Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ gibt es eine divergente Folge.

(b) Sind zwei Folgen divergent, so ist ihre Differenz auch stets divergent.

(c) Ist (a_n) eine beschränkte Folge, so konvergiert $\left(\frac{a_n}{n^2}\right)$.

(d) Ist (a_n) eine divergente Folge, so divergiert auch (a_{2n}).

(e) Ist (a_n) eine konvergente Folge, so konvergiert auch (a_{2n}).

Übungsaufgabe 97 (E)**.** Es sei die reelle Folge a_n konvergent mit Grenzwert a. Betrachten Sie die Folge

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Es ist also b_n der Mittelwert der ersten n Folgenglieder von (a_n). Zeigen Sie, dass auch b_n konvergiert und ebenfalls den Grenzwert a besitzt.

Hinweis: Teilen Sie auf und betrachten Sie die Teilfolgen I,II und III. Zeigen Sie, dass Teilfolge I eine Nullfolge und Teilfolge III eine Einsfolge ist. Es genügt also, die Konvergenz von II zu untersuchen.

$$b_n - a = \underbrace{\frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{n(\varepsilon)} - a)}{n}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\frac{(a_{n(\varepsilon)+1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n - n(\varepsilon)}}_{\mathrm{II}} \underbrace{\frac{n - n(\varepsilon)}{n}}_{\mathrm{III}}$$

Übungsaufgabe 98 (E)**.** Für eine reelle Folge $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne $H(\mathbf{a})$ die Menge der Häufungspunkte von $\mathbf{a}$. Ein Häufungspunkt ist dabei jede reelle Zahl, die als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge auftritt. Geben Sie ein $\mathbf{a}$ an mit:

(a) $H(\mathbf{a}) = \emptyset$ (b) $H(\mathbf{a}) = \{1, 2, 3\}$ (c) $H(\mathbf{a}) = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

Übungsaufgabe 99. Wie Übungsaufgabe 98, aber mit

(a) $H(\mathbf{a}) = \mathbb{Z}$ (b) $H(\mathbf{a}) = [0, 1]$ (c) $H(\mathbf{a}) = \mathbb{R}$

Reihen

Übungsaufgabe 100 (T)**.**

(a) Überprüfen Sie, dass für $k \geq 1$ gilt: $\dfrac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

(b) Berechnen Sie $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$.

(c) Berechnen Sie $a_n := s_n - s_{n-1}$ mit s_n aus Teil (b).

(d) Berechnen Sie für a_n und s_n aus Teil (b) bzw. (c) die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Übungsaufgabe 101 (T)**.** Finden Sie möglichst einfache Ausdrücke für die Teilsummen der Folgen

(a) $a_n = n$ (b) $b_n = (-1)^n$ (c) $c_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$
(d) $d_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (e) $e_n = \frac{1+(-2)^n}{2^n}$ (f) $f_n = 1$

Hinweis: Werfen Sie für Unterpunkt (d) einen Blick auf Übungsaufgabe 100.

Übungsaufgabe 102 (B)**.** Betrachten Sie die drei endlichen Reihen

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{N_1},$$
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{17}+\frac{1}{18}+\frac{1}{19}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{N_2},$$
$$\frac{1}{1000}+\frac{1}{1001}+\frac{1}{1002}+\frac{1}{1003}+\ldots+\frac{1}{N_3}.$$

Wie weit müssen Sie summieren, d.h. wie groß müssen Sie N_1, N_2 und N_3 wählen, damit die Summe jeweils sicherlich den Wert $\frac{1}{2}$ übersteigt? Schließen Sie aus dem gerade angewandten Verfahren, dass die harmonische Reihe divergiert und geben Sie ein N_4 an, sodass $\sum_{n=1}^{N_4} \frac{1}{n} > 10^{10}$.

Übungsaufgabe 103 (T)**.** Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \ldots$ aus Aufgabe 101 auf Konvergenz. Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Übungsaufgabe 104 (E)**.** Zeigen Sie, dass die hyperharmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha > 1$ konvergiert, für $\alpha < 1$ divergiert.

Hinweis: Fassen Sie zunächst ähnlich wie beim Beweis der Konvergenz der harmonischen Reihe die Glieder für die Indizes 2^n+1 bis 2^n zusammen und schätzen Sie deren Summe durch ein geeignetes q^n ab; für $\alpha > 1$ nach oben mit $q < 1$, für $\alpha < 1$ nach unten mit $q > 1$. Damit ist eine geometrische Reihe als konvergente Majorante bzw. als divergente Minorante gefunden.

Übungsaufgabe 105 (T)**.** Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen und geben Sie - falls existent - den Grenzwert an.

(a) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} 4\left(-\frac{1}{4}\right)^m$ (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4\cdot(-1)^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{4\cdot 2^k}$ (d) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4}2^i$.

Übungsaufgabe 106 (T*)**.** Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\psi}}{2^n}$.

Übungsaufgabe 107 (E). Berechnen Sie die ersten drei Nachkommastellen der Euler'schen Zahl e ohne Zuhilfenahme des Taschenrechners. Wie viele Terme der Exponentialreihe sind dafür erforderlich?

Hinweis: Wenn Sie hinreichende Genauigkeit garantieren wollen, müssen Sie zeigen, dass der Reihenrest der Exponentialreihe nur mehr sehr klein ist. Verwenden und begründen Sie dabei eine Abschätzung der Form

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{N!}\left(1 + \frac{1}{N+1} + \frac{1}{(N+1)(N+2)} + \dots\right) \leq \frac{1}{N!}\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{(1-q)N!}$$

mit $q = \frac{1}{N+1}$.

Übungsaufgabe 108 (T). Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz, indem Sie eine geeignete Majorante bzw. Minorante angeben:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)^2}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (1+\tfrac{1}{n})^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)}{1+2^n}$.

Übungsaufgabe 109 (T). Wie Übungsaufgabe 108.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-4}{n^4+2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{24n}{n^2-4}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+\cos(4n)}{4n^2}$

Übungsaufgabe 110 (T). Untersuchen Sie mittels Majoranten- und Minorantenkriterium auf Konvergenz bzw. Divergenz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3}-\sqrt{n}} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

Übungsaufgabe 111 (T). Untersuchen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen mit Hilfe eines geeigneten Kriteriums:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^{(n^2)}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Hinweis: Verwenden Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Übungsaufgabe 112 (T*). Überprüfen Sie die Formel für das Cauchyprodukt $\sum a_n \cdot \sum b_n = \sum\sum a_{n-k}b_k$ anhand des Beispiels der beiden Reihen mit Summanden $a_n = \frac{1}{2^n}$ und $b_n = \frac{1}{3^n}$.

Übungsaufgabe 113 (T*). Wie Übungsaufgabe 112 mit $a_n = \frac{2^n}{n!}$ und $b_n = \frac{(-3)^n}{n!}$.

Übungsaufgabe 114 (E). Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Voraussetzung der absoluten Konvergenz für die Existenz des Cauchyproduktes nicht einfach weggelassen werden kann.

Hinweis: Da die Reihen der a_n und b_n bedingt konvergieren sollen, müssen Sie vor allem die Vorzeichen geschickt wählen. Vielleicht gelingt es, dies so zu arrangieren, dass die Summanden in $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ für festes n gleiches Vorzeichen haben und die c_n mit wachsendem n nicht gegen 0 konvergieren. Dann konvergiert das Cauchyprodukt überhaupt nicht.

Übungsaufgabe 115 (E). Betrachten Sie die Partialsummen einer konvergenten alternierenden Reihe $\sum a_k$. Begründen Sie damit folgende Fehlerabschätzung:

$$\left|\sum_{k=1}^{n-1} a_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leq |a_n|.$$

Übungsaufgabe 116 (T)**.** Berechnen Sie die Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \frac{1}{k}$ für $n = 1, 2, \ldots, 10$ exakt als Bruch und in Dezimaldarstellung auf eine Nachkommastelle gerundet.

Hinweis: Fehlerabschätzung aus Aufgabe 115.

Übungsaufgabe 117 (T)**.** Bei welchen der folgenden Reihen darf das Leibniz'sche Kriterium verwendet werden? Berechnen Sie für jene Reihen, die alternierend und konvergent sind, jeweils den Grenzwert zumindest bis auf die Stellen vor dem Komma!

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \quad x \in \mathbb{R}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin(n)}{n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[e - (1+\tfrac{1}{n})^n\right].$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{xn}{n+1}\right)^n, \ x \in \mathbb{R}.$

Hinweis: Fehlerabschätzung aus Aufgabe 115.

Übungsaufgabe 118 (T)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz mit einem Kriterium Ihrer Wahl.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(\tfrac{1}{n})$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin(-\tfrac{1}{n})$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\tfrac{(-1)^n}{n})$

Übungsaufgabe 119 (T)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz bzw. Divergenz mit einem Kriterium Ihrer Wahl.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n!}{(2n)!}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^{(n^2)}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n, \quad \text{mit } a_n = \begin{cases} \frac{2}{n}, & n \text{ ungerade} \\ -\frac{1}{n-1}, & n \text{ gerade} \end{cases}$

Komplexe Zahlen

Übungsaufgabe 120 (B)**.** Rechnen Sie für komplexe Zahlen nach, indem Sie die entsprechenden Gesetze für reelle Zahlen verwenden:

(a) das Kommutativgesetz für die Addition

(b) das Assoziativgesetz für die Addition

(c) das Kommutativgesetz für die Multiplikation

(d) das Assoziativgesetz für die Multiplikation

(e) das Distributivgesetz

Übungsaufgabe 121 (T)**.** Berechnen Sie die Summe der komplexen Zahlen $2 + 3i$ und $1 - i$ und illustrieren Sie Ihre Rechnung graphisch.

Übungsaufgabe 122 (E)**.** Beweisen Sie

(a) das Additionstheorem für den Cosinus

(b) das Additionstheorem für den Sinus

auf elementargeometrischem Weg.

Übungsaufgabe 123 (B). Wie die vorige Aufgabe, aber nun indem Sie Real- und Imaginärteil der Gleichung $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ mit $z = i\alpha$ und $w = i\beta$ berechnen.

Übungsaufgabe 124 (T*). Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der Summe

$$\sum_{k=0}^{N} \cos k\alpha + i \sin k\alpha.$$

Hinweis: Wenden Sie zuerst die *Euler'sche Formel* $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ auf die Summanden an und verwenden Sie dann die Summenformel für die geometrische Reihe.

Übungsaufgabe 125 (T). Berechnen Sie sämtliche n-te Wurzeln der komplexen Zahl z und stellen Sie diese graphisch dar:

(a) $z = i, n = 2$	(b) $z = 1, n = 3$	(c) $z = 1, n = 4$
(d) $z = -2, n = 4$	(e) $z = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, n = 3$	(f) $z = 3 + 4i, n = 5$

Stellen Sie Real- und Imaginärteil der Ergebnisse, sofern möglich (das ist nicht immer der Fall), mittels reeller Wurzeln ohne Winkelfunktionen dar.

Übungsaufgabe 126 (B). Begründen Sie die angegebenen Werte von Sinus und Cosinus mit elementargeometrischen Überlegungen:

$$\sin 0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad \sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

(a) Zeigen Sie, dass die Winkelsumme eines Dreiecks stets gleich $\pi = 180°$ ist.

(b) Welche Winkel hat folglich ein gleichseitiges Dreieck?

(c) Verwenden Sie Ihr Resultat, um $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$ (warum stimmen diese beiden Werte überein?) zu bestimmen.

(d) Verwenden Sie den Satz von Pythagoras für die fehlenden Werte.

Übungsaufgabe 127 (T). Schreiben Sie die komplexe Zahl

(a) $z = \frac{1+2i}{1+3i}$ (b) $z = |1 \pm 7i|$ (c) $z = \frac{2}{(3+i)^2} + \frac{2}{(3-i)^2}$ (d) $z = \frac{2}{(3+i)^2} - \frac{2}{(3-i)^2}$

in der Standardform $\mathrm{Re} z + i\, \mathrm{Im} z$ an. Skizzieren Sie Ihr Ergebnis in der Gauß'schen Zahlenebene und geben Sie jeweils auch die konjugiert komplexe Zahl an.

Übungsaufgabe 128 (T). Berechnen Sie unter Benutzung der Darstellung in Polarform

(a) $z = i^{128}$ (b) $(-3 + 3i)^{10}$ (c) $(1 - \sqrt{3}i)^9$ (d) $\sqrt[4]{2 - 2i}$ (e) $\sqrt[3]{i + \sqrt{3}}$

und schreiben Sie das Ergebnis in der Standardform $\mathrm{Re} z + i\, \mathrm{Im} z$ an. Vereinfachen Sie dabei so weit wie möglich (nicht immer wird das in befriedigender Weise gelingen).

Übungsaufgabe 129 (T). Es sei $z = \dfrac{1-i}{1+i}$.

(a) Zeichnen Sie z in der Gauß'schen Zahlenebene ein.

(b) Schreiben Sie z in Polardarstellung an.

(c) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von z^{99}.

Übungsaufgabe 130 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 129 aber mit $z = \dfrac{1+i}{1-i}$.

Übungsaufgabe 131 (T)**.** Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen und stellen Sie sie graphisch dar:

(a) $\mathrm{Im}\ z = -1$	(b) $\mathrm{Re}\ (-iz) = 1$	(c) $\mathrm{Re}(z(1+i)) = 1$
(d) $\mathrm{Re}\ z^2 \geq 1$	(e) $\bar{z}^2 = z^2$	(f) $\|z+1+i\| = 1$
(g) $\|\mathrm{Re}\ z - \mathrm{Im}\ z\| \leq 1$	(h) $(\mathrm{Re}\ z)(\mathrm{Im}\ z) \leq 1$	

Geometrie im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Übungsaufgabe 132 (T)**.** Geben Sie sich zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ vor, deren Koordinaten alle von 0 verschieden sind, berechnen Sie die Summe $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ und illustrieren Sie Ihre Rechnung mit einer sorgfältigen Skizze.

Übungsaufgabe 133 (B)**.** Überprüfen Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus rechnerisch, aber ohne Taschenrechner für die Winkel $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$.

Übungsaufgabe 134 (T)**.** Drehen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(-1/1), (0/2)$ und $(1/2)$ um $45°$ im Uhrzeigersinn (mathematisch negativ).

Übungsaufgabe 135 (T*)**.** Durch die Gleichung $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 1$ wird eine Ellipse festgelegt. Bestimmen Sie die Gleichung der um $45°$ gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) gedrehten Ellipse indem Sie die Transformation $x \to x\cos\alpha + y\sin\alpha,\ y \to -x\sin\alpha + y\cos\alpha$ durchführen.

Übungsaufgabe 136 (B)**.** Zeigen Sie für das rechtwinkelige Dreieck mit den Eckpunkten $A = (0/0/0)$, $B = (b/0/0), C = (b/c/0)$ $(b, c > 0)$ durch Nachrechnen, dass der Cosinus des von $\mathbf{x} := \overline{AB}$ (dem Vektor von A nach B) und $\mathbf{y} := \overline{AC}$ (dem Vektor von A nach C) eingeschlossenen Winkels tatsächlich durch

$$\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}\sqrt{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}}}$$

gegeben ist.

Übungsaufgabe 137 (T)**.** Geben Sie sich zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ vor, die weder normal noch parallel zueinander stehen und auch nicht parallel zu einer der drei Koordinatenebenen sind. Bestimmen Sie $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ rechnerisch und fertigen Sie eine Skizze (zum Beispiel im Schrägriss) an.

Übungsaufgabe 138 (B)**.** Rechnen Sie nach, dass der durch diese Formel definierte Vektor $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ sowohl auf $\mathbf{x}$ als auch auf $\mathbf{y}$ normal steht.

Übungsaufgabe 139 (B)**.** Zeigen Sie für das rechtwinkelige Dreieck $A = (0/0/0)$, $B = (b/0/0)$, $C = (b/c/0)$ durch Nachrechnen, dass der Flächeninhalt tatsächlich durch den Betrag des Vektorproduktes $\frac{1}{2}\overline{AB} \times \overline{AC}$ gegeben ist.

Übungsaufgabe 140 (B)**.** Verwenden Sie die Formel *Volumen* $=$ *Grundfläche* $\times$ *Höhe* um nachzuweisen, dass das Volumen des Parallelepipeds („verzerrter Würfel") mit Seiten $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ durch das sogenannte *Spatprodukt* $|\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})|$ gegeben ist. Wie kann man daraus durch eine geometrische Überlegung folgern, dass

$$|\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z})| = |\mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x})| = |\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})|$$

gilt?

Bemerkung: Diese Gleichungen würden auch nach Weglassen der Absolutbeträge gelten, jedoch falsch werden, wenn man an einer Stelle die Reihenfolge im Vektorprodukt vertauschte.

Übungsaufgabe 141 (T)**.** Gegeben ist das Quadrat Q mit den Eckpunkten $(1/1)$, $(1/-1)$, $(-1/-1)$ und $(-1/1)$ sowie die Gerade g_α durch die Punkte $(0/0)$ und $(\cos\alpha/\sin\alpha)$. Berechnen Sie die Abstände aller Eckpunkte von der Geraden g_α sowie die (orthogonale) Projektion des Quadrates Q auf die Gerade g_α.

Übungsaufgabe 142 (T)**.** Berechnen Sie den (spitzen) Winke,l unter dem sich die beiden Ebenen $\varepsilon_1 : 2x + z = 2$ und $\varepsilon_2 : 3y + z = 2$ schneiden.

Übungsaufgabe 143 (T)**.** Berechnen Sie alle Winkel (Angabe des Cosinus genügt) sowie den Flächeninhalt des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B, C:

$$A = (1/0/0) \qquad B = (0/1/0) \qquad C = (0/0/1).$$

Übungsaufgabe 144 (T)**.** Berechnen Sie alle Winkel (Angabe des Cosinus genügt) sowie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Eckpunkten A, B, C. Geben Sie außerdem die Gleichung jener Ebene an, welche A, B, C enthält:

$$A = (0/1/1) \qquad B = (-1/0/1) \qquad C = (1/1/0).$$

Übungsaufgabe 145 (T)**.** Bestimmen Sie die Oberfläche und das Volumen des Tetraeders mit Eckpunkten:

$$A = (3/1/-1), \quad B = (1/0/1), \quad C = (-5/3/1), \quad D = (-4/1/2).$$

Übungsaufgabe 146 (T)**.** Bestimmen Sie für das Tetraeder aus Beispiel 145 jeweils den Winkel, den zwei Seitenflächen miteinander einschließen.

Übungsaufgabe 147 (B)**.** Welche geometrischen Objekte werden für festes $r > 0$ durch

$$x_1(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad x_2(\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ beschrieben?

Übungsaufgabe 148 (T)**.** Geben Sie die Gleichung(en) des Kreises mit Mittelpunkt $M = (0/0/1)$ und Radius $r = 2$, welcher sich in der Ebene $z = 1$ befindet, jeweils in kartesischen Koordinaten, in Zylinderkoordinaten und in Kugelkoordinaten an.

Übungsaufgabe 149 (T*)**.** Nehmen Sie an, die Erde wäre eine ideale Kugel mit $R = 6,371 \times 10^6$ m. Mit $\mathbf{x}$ sei der Radiusvektor vom Erdmittelpunkt zum Hörsaal ihrer Übungsgruppe an der TU Wien bezeichnet. Geben Sie $\mathbf{x}$ möglichst genau in Kugelkoordinaten und in kartesischen Koordinaten an. Die z-Achse weist dabei vom Erdmittelpunkt in Richtung Nordpol, die x-Achse vom Erdmittelpunkt in Richtung jenes Punktes am Äquator mit Längengrad 0 und die y Achse in Richtung jenes Punktes am Äquator mit östlichem Längengrad 90°. Auf wie viele Stellen ist die Angabe der Koordinaten sinnvoll?

Reelle Funktionen

Übungsaufgabe 150 (B)**.** Wählen Sie eine konkrete reelle Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Skizzieren Sie sodann die beiden Mengen

$$A := \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad B := \{(f(x), x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(a) Erklären Sie, wie A und B geometrisch zusammenhängen und finden Sie heraus, welche Eigenschaft von f dafür verantwortlich ist, ob B ebenfalls der Graph einer Funktion ist.

(b) Wenn in Ihrem konkreten Beispiel B der Graph einer Funktion ist, finden Sie abschließend eine andere konkrete Funktion f, sodass B nun nicht mehr der Graph einer Funktion ist. Wenn in Ihrem konkreten Beispiel B nicht der Graph einer Funktion war, finden Sie eine andere konkrete Funktion f, sodass B nun doch Graph einer Funktion ist.

Übungsaufgabe 151 (T)**.** Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der x-y-Ebene ein und entscheiden Sie, ob es sich dabei um den Funktionsgraphen einer Funktion $y = f(x)$ handelt. Falls ja, geben Sie die Abbildungsvorschrift, sowie Definitions- und Wertebereich an.

(a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,
$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x \geq 0\}$,
$\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1 \text{ und } y \geq 0\}$.

(b) $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$,
$\{(0, y) : x \in \mathbb{R}\}$,
$\{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(x^2, x) : x \in \mathbb{R}\}$,
$\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$.

Übungsaufgabe 152 (T)**.** Gegeben ist die reelle Funktion

$$f(x) = (x + 1)^2 - 4.$$

Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass f auf D injektiv ist. Bestimmen Sie den Wertebereich $f(D)$ und berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{(-1)}$. Geben Sie diese in der Form $f^{(-1)}(x) = \ldots$ an. Skizzieren Sie sowohl den Graphen von f als auch den Graphen von $f^{(-1)}$.

Übungsaufgabe 153 (T)**.** Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) := \dfrac{x-1}{x+1}$ für $x \neq -1$.

(a) Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$, sowie einen Wertebereich $W \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass $f : D \to W$ bijektiv ist.

(b) Berechnen Sie die Umkehrfunktion und geben Sie diese in der Form $f^{(-1)}(x) = \ldots$ an.

(c) Geben Sie $f^{(153)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{153\text{mal}}(x)$ und $f^{(154)}(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{154\text{mal}}(x)$ an.

Hinweis: In Teilaufgabe (c) sollen Sie natürlich nicht 154 mal die Funktionsvorschrift einsetzen. Berechnen Sie besser zuerst $f^{(2)}$ und verwenden Sie dann $f^{(154)} = f^{(152)} \circ f^{(2)} = f^{(150)} \circ f^{(2)} \circ f^{(2)} = \ldots$

Übungsaufgabe 154 (T). Gegeben sind die beiden reellen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x)$.

(a) Berechnen Sie $f(g(x))$ und $g(f(x))$ und skizzieren Sie die Funktionsgraphen dieser Funktionen.

(b) Geben Sie Definitionsbereiche $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ an, sodass f auf D_1 und g auf D_2 injektiv ist. Bestimmen Sie dort die Umkehrfunktionen $f^{(-1)}$ und $g^{(-1)}$.

Übungsaufgabe 155 (B). Es sei $f(x)$ eine gerade Funktion und $g(x)$ eine ungerade Funktion. überprüfen Sie ob die Funktionen

(a) $r(x) := f(g(x))$, (b) $s(x) := g(f(x))$, (c) $t(x) := f(x) \cdot g(x)$
(d) $u(x) := f(x) + g(x)$ (e) $v(x) := f(x) - g(x)$

stets gerade, stets ungerade oder im allgemeinen keines von beidem sind.

Übungsaufgabe 156. (P) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ eine streng monoton wachsende Funktion. Bestimmen Sie das Monotonieverhalten von

(a) $f_1(x) = -f(x)$ (b) $f_2(x) = \frac{1}{f(x)}$
(c) $f_3(x) = f^{(-1)}(x)$ (d) $f_4(x) = \sqrt{f(x)}$

anhand der Definition von Monotonie. überlegen Sie sich abschließend was passiert, wenn Sie „streng monoton“ durch „monoton“ bzw. „wachsend“ durch „fallend“ ersetzen.

Übungsaufgabe 157 (T). Untersuchen Sie folgende reelle Funktionen jeweils auf Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit, Monotonie, Periodizität und Parität (gerade oder ungerade) und skizzieren Sie die Funktionsgraphen. Geben Sie jeweils auch Definitions- und Wertebereich an.

(a) $f_1(x) = x^2$ (b) $f_2(x) = \sqrt{x}$
(c) $f_3(x) = |x|$ (d) $f_4(x) = \frac{1}{x}$

Übungsaufgabe 158 (T). Untersuchen Sie folgende reelle Funktionen auf Monotonie und Umkehrbarkeit. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich an und argumentieren Sie für die Monotonieeigenschaften nicht nur anschaulich, sondern rechnen Sie die jeweilige Definition nach. Skizzieren Sie anschließend die Funktionsgraphen. Falls möglich, geben Sie auch die Umkehrfunktion (samt ihrem Definitions- und Wertebereich) an.

(a) $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, x \neq 0$ (b) $f_2(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, x \neq 0$
(c) $f_3(x) = x|x|$ (d) $f_4(x) = 1$
(e) $f_5(x) = x$ (f) $f_6(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

Übungsaufgabe 159 (T). Analog zu Übungsaufgabe 158:

(a) $f_1(x) = \cos x$ (b) $f_2(x) = \exp x$ (c) $f_3(x) = \exp(-|x|)$
(d) $f_4(x) = \ln x$ (e) $f_5(x) = |\ln x|$ (f) $f_6(x) = \ln |x|$

Übungsaufgabe 160 (E). Wie würden Sie $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ präzise definieren?

Übungsaufgabe 161 (T). Zeigen Sie anhand der Definition der Stetigkeit, dass $f(x) = (x-1)^2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist. Geben Sie sich ein konkretes $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ vor und berechnen Sie ein passendes $\delta > 0$, sodass die ε-δ Charakterisierung der Stetigkeit an x_0 erfüllt ist.

Übungsaufgabe 162 (E)**.** Zeigen Sie, dass analog zu Folgen auch für Funktionen gilt:

`Ist` f `(wenigstens in der Nähe von` x_0`) beschränkt und` $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$`, so folgt` $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$`.`

Übungsaufgabe 163 (E)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

an der Stelle $x = 0$ stetig und an allen Stellen $x \neq 0$ unstetig ist.

Übungsaufgabe 164 (T)**.** Existieren folgende Grenzwerte? Begründen Sie Ihre Antworten anhand der Definition des Grenzwertes für Funktionen.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sgn}(x) + 1)$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} (\operatorname{sgn}(x) + 1)$, (c) $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{sgn}(x) + 1)$,
(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$, (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x}$, (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

Übungsaufgabe 165 (T)**.** Skizzieren Sie folgende Funktionen und argumentieren Sie, wo die Funktionen stetig bzw. unstetig sind.

(a) $f(x) = \begin{cases} 2x^2, & \text{für } x < 1, \\ 3, & \text{für } x = 1, \\ \frac{1}{3-x}, & \text{für } x > 1. \end{cases}$ (b) $f(x) = \operatorname{sgn}((-x-1)(-x+1)(-x+3))$.

Lösung: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 3\}$

Übungsaufgabe 166 (T)**.** Gegeben ist die Funktion

$$f_{a,b}(x) = \begin{cases} x^2, & \text{für } x < -1, \\ ax + b, & \text{für } -1 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2bx-1}, & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

Bestimmen Sie jene Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ für die $f_{a,b}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Übungsaufgabe 167 (T*)**.** Begründen Sie, warum die Gleichung $x = e^{-x}$ (a) mindestens eine (b) genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ besitzt und berechnen Sie eine solche Lösung näherungsweise. Sie können dazu die Stetigkeit der Exponentialfunktion als gegeben betrachten.

Übungsaufgabe 168 (E)**.** Eine an beiden Enden eingespannte Saite werde durch eine stetige Funktion $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = g(2) = 0$ dargestellt.

(a) Zeigen Sie, dass es immer zwei Punkte $x_1, x_2 \in [0, 2]$ mit $|x_1 - x_2| = 1$ gibt, die gleich weit ausgelenkt werden, i.e. für die $g(x_1) = g(x_2)$ gilt. *Hinweis:* Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf eine geeignete Hilfsfunktion $h(x)$ an.

(b) Illustrieren Sie diesen Sachverhalt speziell für die Funktionen $g(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ und $g(x) = \sin\left(\pi(\frac{x}{2})^2\right)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel einer stetigen Funktion $g : [0, 2] \to \mathbb{R}$ an, so dass Sie (außer $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$) keine zwei Punkte x_1, x_2 mit $|x_1 - x_2| > 1$ und $g(x_1) = g(x_2)$ finden können.

Übungsaufgabe 169 (B)**.** Führen Sie durch schrittweises Zerlegen der Funktion f in Ihre elementaren Bestandteile die Stetigkeit von f auf die Stetigkeit der Exponentialfunktion ($x \mapsto e^x$) und auf die Stetigkeit der identischen Abbildung ($x \mapsto x$) zurück. Geben Sie einen möglichst großen Definitionsbereich für folgende Funktionen an:

(a) $\sqrt{1 + \tan^2 x}$ (b) $\ln(x^2 + 2x - 1)$ (c) $\ln(\ln(\ln x))$ (d) $e^{\frac{1}{x}}$

Übungsaufgabe 170 (B)**.** Finden Sie von den bereits behandelten Beispielen verschiedene reelle Funktionen f und g auf geeigneten Definitionsbereichen (diese sind unbedingt anzugeben!) mit folgenden Eigenschaften:

(a) f ist stetig, nimmt aber weder Maximum noch Minimum an. (Wie muss der Definitionsbereich jedenfalls beschaffen sein?)

(b) f ist auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert, nimmt aber weder Maximum noch Minimum an. (Wie muss f jedenfalls beschaffen sein?)

Übungsaufgabe 171 (B)**.** Wir betrachten die Funktionen $f_n(x) := x^n$, $n \in \mathbb{N}$, mit der Grenzfunktion $f(x) = 0$ für $x < 1$ und $f(1) = 1$, diesmal aber auf unterschiedlichen Definitionsbereichen $D \subseteq [0, 1]$. Begründen Sie:

(a) Ist $D = [0, a]$ mit $a < 1$, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

(b) Auf keinem der Intervalle $D := [1 - \varepsilon, 1]$ mit $\varepsilon > 0$ ist die Konvergenz gleichmäßig.

(c) Die Konvergenz ist genau dann gleichmäßig auf D, wenn 1 kein Häufungspunkt von D ist, d.h. wenn es keine Folge $\mathbf{a}$ mit Folgengliedern $a_n \in D$ und $a_n \neq 1$ für alle n gibt, so dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

Übungsaufgabe 172 (T*)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{2}{2nx + \frac{1}{2nx}}, & \text{für } x > 0 \\ 0, & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass g_n auf $[0, \infty)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine stetige Funktion mit Maximum 1 ist. Verwenden Sie dazu, dass $x \mapsto x + \frac{1}{x}$ genau für $x = 1$ ein Minimum besitzt.

(b) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen von g_n für $n = 1, 2, 3$.

(c) Bestätigen Sie, dass die Funktionenfolge der g_n auf $[0, \infty)$ punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Funktion $g(x) = 0$ (Nullfunktion) konvergiert. Es konvergiert jedoch g_n gleichmäßig auf jedem Teilintervall der Form $[a, \infty)$, mit $a > 0$.

Übungsaufgabe 173 (T*)**.** Betrachten Sie die reelle Funktion $f_{x_0}(x) = \frac{1}{1+(x-x_0)^2}$.

(a) Setzen Sie $x_0 = 0$ und argumentieren Sie, dass f_0 stetig und beschränkt ist sowie ein (globales) Maximum an $x = 0$ besitzt. Fertigen Sie eine Skizze an.

(b) überlegen Sie sich, wie Sie aus dem Funktionsgraphen von f_0 sofort und ohne weitere Rechnung die Funktionsgraphen von f_{x_0} für beliebiges x_0 gewinnen können.

(c) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ (d.h. der Parameter x_0 durchläuft nun der Reihe nach alle natürlichen Zahlen). Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten dieser Funktionenfolge (punktweise und/oder gleichmäßig) und berechnen Sie die Grenzfunktion.

Übungsaufgabe 174 (B). Finden Sie jeweils ein Beispiel von (paarweise verschiedenen) stetigen Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die eine punktweise Grenzfunktion f haben, und für die zusätzlich gilt:

(a) Die Konvergenz ist gleichmäßig auf $[0,1]$. (Folglich ist f stetig.)

(b) Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf $[0,1]$, f ist aber trotzdem stetig.

(c) Die Konvergenz ist nicht gleichmäßig auf $[0,1]$, und f ist nicht stetig.

Sie müssen die f_n und f nicht unbedingt durch eine Formel angeben. Es genügt, wenn Sie Ihre Ideen mit Hilfe qualitativer Skizzen erläutern.

Übungsaufgabe 175 (E). Zeigen Sie: Bilden die x_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge in $D \subseteq \mathbb{R}$ und ist f gleichmäßig stetig auf D, dann bilden auch die $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchyfolge.

Übungsaufgabe 176 (T). Geben Sie eine rationale Funktion an, die

(a) genau bei $x = 1$ und $x = 0$ Nullstellen hat, die bei $x = -1$ gegen $-\infty$ divergiert und für alle reellen Zahlen außer -1 definiert ist.

(b) genau bei $x = 1, x = 0$ und $x = 2$ Nullstellen hat, die bei $x = -3$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert und für alle reellen Zahlen außer -3 definiert ist.

Skizzieren Sie Ihre Funktion. Können Sie noch eine zweite solche Funktion angeben?

Übungsaufgabe 177 (B). Geben Sie drei verschiedene reelle Polynome mit den Nullstellen $0, 1, 2, 3, 4$ an und überlegen Sie sich, wie man alle reellen Polynome mit diesen Nullstellen beschreiben kann.

Hinweis: Es gibt ein, in einem naheliegenden Sinn minimales, Polynom mit dieser Eigenschaft. Alle anderen sind Vielfache davon.

Übungsaufgabe 178 (T). Zerlegen Sie das Polynom f in irreduzible komplexe und irreduzible reelle Faktoren.

(a) $f(x) = x^3 - 1$ (b) $f(x) = x^5 - 1$
(c) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ (d) $f(x) = x^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$

Übungsaufgabe 179 (T). Bestimmen Sie alle komplexen Nullstellen von f und faktorisieren Sie f einmal in reelle und einmal in komplexe irreduzible Faktoren:

$$f(x) = x^6 + x^5 - 2x^4 - x^2 - x + 2$$

Übungsaufgabe 180 (T).

(a) Sei $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ und $q(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$. Zerlegen Sie p und q in möglichst viele Faktoren mit reellen Koeffizienten.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungen $p(x) = 0$ und $q(x) = 0$ für $x \in \mathbb{C}$.

Übungsaufgabe 181 (T). Gegeben ist die Interpolationsaufgabe $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{2}) = 2$ und $f(\frac{3}{4}) = 4$.

(a) Finden Sie irgendein Interpolationspolynom für so ein f.

(b) Finden Sie ein anderes Polynom mit denselben Werten an den angegebenen Stellen?

Übungsaufgabe 182 (T)**.** Bestimmen Sie mit einer Methode Ihrer Wahl die Partialbruchzerlegung von

(a) $\dfrac{2x^3+4x+6}{(x-1)^2(x^2+3)}$ (b) $\dfrac{3+2x+5x^2+2x^3}{1+2x+2x^2+2x^3+x^4}$ (c) $\dfrac{x^3-5x^2+7x+3}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}$

Übungsaufgabe 183 (B)**.** Begründen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ die Rechenregeln:

(a) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ (b) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$ (c) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

Verwenden Sie in in Ihrer Argumentation nur die entsprechenden Regeln mit ganzzahligen Exponenten und die Definition von Potenzen mit rationalen Exponenten.

Übungsaufgabe 184 (E)**.** In der Definition der Potenzfunktion $p_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ für allgemeines α ist der natürliche Logarithmus ln verwendet worden. Hätte man p_α auch mit dem Logarithmus $\log_a$ zu einer Basis $a \neq e$ verwenden können? Wenn ja: Wie? Wenn nein: Warum nicht?

Übungsaufgabe 185 (E)**.** Tangens und Cotangens sind mittels Sinus und Cosinus definiert. Wegen $\sin^2 + \cos^2 = 1$ definieren sin und cos einander bis aufs Vorzeichen. Folglich müssen auch $\tan^2$ und $\cot^2$ sowohl durch $\sin^2$ als auch durch $\cos^2$ eindeutig bestimmt sein. Diese Zusammenhänge lassen sich auch umkehren. Ihre Aufgabe besteht darin, diese Zusammenhänge vollständig zu erfassen, indem Sie

(a) $\sin^2$, $\cos^2$ und $\tan^2$ als Funktionen von $\cot^2$

(b) $\sin^2$, $\cos^2$ und $\cot^2$ als Funktionen von $\tan^2$

(c) $\sin^2$, $\tan^2$ und $\cot^2$ als Funktionen von $\cos^2$

(d) $\cos^2$, $\tan^2$ und $\cot^2$ als Funktionen von $\sin^2$

ausdrücken.

Übungsaufgabe 186. Zeigen Sie, dass jede Funktion der Form $f(t) = A\sin(\omega t + \delta)$ (harmonische Schwingung) mit Amplitude A, Kreisfrequenz ω und Phasenfaktor δ auch in der Form

$$f(t) = A\sin(\omega t + \delta) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$$

dargestellt werden kann. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Parametern A, δ einerseits und a, b andererseits explizit an. Rechnen Sie sodann folgende Schwingungen in die jeweils andere Darstellung um: (a) $\cos t$ (b) $\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\sin t + \cos t$ (d) $3\sin 2t - 4\cos 2t$ (e) 2

Differenzialrechnung

Übungsaufgabe 187 (E)**.** Galileo Galilei beschrieb als erster das Fallgesetz, wonach ein knapp über der Erdoberfläche ruhender und ab dem Zeitpunkt $t = 0$ zu Boden fallender Körper, gäbe es keinen Luftwiderstand, bevor er den Boden erreicht nach t Zeiteinheiten eine Fallhöhe von ct^2 Längeneinheiten zurücklegen würde. Dabei hängt die Konstante $c = \frac{g}{2}$, $g =$ Erdbeschleunigung, nicht vom fallenden Körper ab. Setzen Sie anhand dieser Situation die Newtonsche Frage nach der Momentangeschwindigkeit durch eine geeignete graphische Illustration des Problems mit der Leibnizschen Frage nach der Tangentensteigung in Beziehung.

Übungsaufgabe 188 (T)**.** Berechnen Sie durch direkten Rückgriff auf die Definition mittels Differenzenquotienten, die Ableitung f' für

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^n$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ (nur für $x > 0$)

(d) $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für allgemeines $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und $x > 0$

Übungsaufgabe 189 (T)**.** Wie verhält sich die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sqrt{x}$, hinsichtlich Differenzierbarkeit an der Stelle $x = 0$?

Übungsaufgabe 190 (T)**.** Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) := \ln(\ln(\ln(x)))$. Wo ist sie definiert?

Übungsaufgabe 191 (T)**.** Wählen Sie die reellen Parameter a, b und c so, dass die auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{falls } x \leq 0, \\ ax^2 + bx + c & \text{falls } 0 < x \leq 1, \\ 3 - 2x & \text{falls } x > 1. \end{cases}$$

(a) stetig und differenzierbar ist.

(b) stetig, aber nicht differenzierbar ist.

(c) in 0 und 1 unstetig ist.

Übungsaufgabe 192 (E)**.** Sei $f : D \to D$ differenzierbar mit (als bekannt anzunehmender) Ableitung f'. Wir betrachten die Iterationen (Achtung, an dieser Stelle nicht mit den höheren Ableitungen von f verwechseln!) $f^{(n)}$, die rekursiv definiert sind durch $f^{(0)} := \mathrm{Id}_D$ (Identität auf D) und $f^{(n+1)} := f \circ f^{(n)}$.

(a) Begründen Sie, warum alle $f^{(n)}$ differenzierbar sind. *Hinweis:* Vollständige Induktion.

(b) Stellen Sie eine Formel für die Ableitung von $f^{(n)}$ auf und beweisen Sie diese mittels Induktion nach n.

(c) Angenommen $x_0 \in D$ ist ein Fixpunkt von f. Wie vereinfacht sich dann die Formel aus Teil 2 an der Stelle x_0?

Übungsaufgabe 193 (E)**.** Beweisen Sie für $f = f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$ die Ableitungsregel $f' = f \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i'}{f_i}$. mittels Induktion nach n.

Übungsaufgabe 194 (T)**.** Berechnen Sie jeweils das Differential von $f(x)$, d.h. die lineare Approximation an der angegebenen Stelle x_0 und berechnen Sie damit näherungsweise:

(a) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $e^{0.1} \approx ?$

(b) $f(x) = \sin(x), x_0 = 0$, $\sin(5^\circ) \approx ?$

(c) $f(x) = \sqrt{x}$ $x_0 = 1$, $\sqrt{1.1} \approx ?$

(d) $f(x) = x^{20}$, $x_0 = 1$, $(1.02)^{20} \approx ?$

Übungsaufgabe 195 (B)**.** Wieviele lokale Extremstellen kann ein Polynom vom Grad n, das auf ganz $\mathbb{R}$ definiert wird, haben? Was ist die maximale Zahl, und was ist sonst noch möglich? Illustrieren Sie Ihre Überlegungen auch durch Skizzen.

Übungsaufgabe 196. (B) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von der Gestalt $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$. Wie viele Nullstellen hat die Ableitung f'?

Übungsaufgabe 197 (T)**.** Ein Himmelskörper der sich im Abstand $r > 0$ von der Sonne befindet, besitzt das sogenannte „effektive Potential“

$$V(r) = -\gamma \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \gamma \frac{ML^2}{c^2 r^3},$$

wobei $M, L > 0$ feste Parameter sind (M = Sonnenmasse, L = Drehimpuls), γ die Newton'sche Gravitationskonstante und c die Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Anmerkung: Lassen Sie sich nicht verwirren, es liegt einfach eine Funktion der Form $V(r) = -\frac{*}{r} + \frac{*}{r^2} - \frac{*}{r^3}$ vor.

(a) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten und skizzieren Sie $V(r)$.

(b) Bestimmen Sie die Minima von $V(r)$. Die zugehörigen Radien r sind dann genau jene Werte, für die *kreisförmige* Bahnen auftreten.

Übungsaufgabe 198 (T)**.** Berechnen Sie für $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ die erste Ableitung nach den bekannten Ableitungsregeln und erklären Sie deren Verwendung. Wo ist die erste Ableitung jeweils definiert?

Übungsaufgabe 199 (T)**.** Die Schwingungsdauer eines Pendel mit der Länge l berechnet sich zu $\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Dabei bezeichnet g die Fallbeschleunigung (welche in Wien, wenn Sie am Ufer der Donau stehen - 166m über N.N - übrigens ca. 9.7888 m/s^2 beträgt). Auf wie viel % genau kann man die Schwingungsdauer τ angeben, wenn man die Pendellänge l auf 0.1% genau bestimmt?

Hinweis: Linearisieren Sie die Funktion $\tau(l)$.

Übungsaufgabe 200 (E). Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $x \neq 0$ sei $f_{m,n}(x) := x^m \sin\left(\frac{1}{x^n}\right)$, außerdem $f_{m,n}(0) := 0$.

(a) Begründen Sie, warum alle $f_{m,n}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ unendlich oft differenzierbar (und folglich auch stetig) sind und berechnen Sie $f'_{m,n}(x)$ für $x \neq 0$.

(b) Für welche Paare (m, n) ist f stetig?

(c) Für welche Paare (m, n) ist f differenzierbar?

(d) Für welche Paare (m, n) ist f stetig differenzierbar?

(e) Gegeben sei irgendein Paar (m, n). Wie oft ist $f_{m,n}$ differenzierbar, wie oft stetig differenzierbar?

Sie dürfen in dieser Aufgabe bereits die Ableitungsregeln $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$ verwenden.

Übungsaufgabe 201 (T)**.** Berechnen Sie für folgende Funktionen das Taylorpolynom dritten Grades mit dem angegebenen Entwicklungspunkt x_0

(a) $x^3 + 3x^2 + 5$, $x_0 = 0$ (b) $x^3 + 3x^2 + 5$, $x_0 = 1$ (c) x^{201}, $x_0 = 1$

Anleitung: Wenden Sie in Aufgabe (c) den Binomischen Lehrsatz auf den Term $((x-1)+1)^{201}$ an.

Übungsaufgabe 202. Berechnen Sie für folgende Funktionen das Taylorpolynom dritten Grades mit dem angegebenen Entwicklungspunkt x_0.

(a) $\sin(x) - x$, $x_0 = 0$ (b) $\sin(x) - x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$ (c) $\sin(x) + x$, $x_0 = pi$

Übungsaufgabe 203 (T). Welche der Reihen sind Potenzreihen? Geben Sie Entwicklungsstelle und Konvergenzbereich an.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{3}-2)^n$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(x-\frac{1}{n})^n$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(3x-1)^n}{n!}$

Übungsaufgabe 204 (T). Berechnen Sie die Konvergenzradien, und untersuchen Sie das Randverhalten.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\ln(n)/n}x^n$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{n^3}\right)x^n$ (c) $\sum \frac{x^{n^2}}{2^n}$

Übungsaufgabe 205 (E). Für $|x|<1$ gilt bekanntlich $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Mit anderen Worten: die Funktion $\frac{1}{1-x}$ wird durch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ dargestellt. Berechnen Sie die Potenzreihendarstellung der Funktion

$$f(x)=\frac{x}{1-x-x^2}.$$

Hinweis: Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung von $f(x)$ und verwenden Sie die Potenzreihendarstellung der geometrischen Reihe.

Übungsaufgabe 206 (T). Gewinnen Sie durch Anwendung der Rechenregeln für den Logarithmus die Potenzreihendarstellung der Funktion $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ aus der logarithmischen Reihe um den Entwicklungspunkt $x=0$.

Übungsaufgabe 207 (T). Wo ist die Funktion $f(x):=x^x$ definiert? Berechnen Sie f', untersuchen Sie das Verhalten von f insbesondere in der Nähe von $x=0$ und fertigen Sie eine Skizze an.

Übungsaufgabe 208 (B). Die reellen Zahlen $a<b$ seien vorgegeben. Geben Sie konkrete Potenzreihen an, deren Konvergenzbereich in $\mathbb{R}$ genau folgende Mengen sind:

(a) $[a,b]$ (b) $[a,b)$ (c) $(a,b]$ (d) (a,b) (e) $\{a\}$ (f) $\mathbb{R}$

Übungsaufgabe 209 (T). Berechnen Sie den angegebenen Grenzwert mit Hilfe der Regel von de l'Hospital. Vergleichen Sie den Rechenaufwand, wenn Sie Zähler und Nenner zuerst einzeln in Potenzreihen entwickeln.

$$\lim_{x\to 0} x\frac{e^x-e^{-x}}{e^{x^2}-e^{-x^2}}$$

Übungsaufgabe 210 (T). Berechnen Sie folgenden Grenzwerte für alle *positiven* reellen Zahlen α:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\exp(\alpha x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}.$$

Schließen Sie daraus auf die Grenzwerte von

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\beta}{\exp(\alpha x)} \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha},$$

für alle *positiven* reellen Zahlen α und β.

Übungsaufgabe 211 (T*). Sei

$$f(x) = \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{\sin x}.$$

(a) Warum läßt sich der Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht mit der Regel von de l'Hospital berechnen?

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle die beiden Folgen $a_k = \frac{1}{k\pi}$ und $b_k = \frac{2}{(2k+1)\pi}$.

(b) Berechnen Sie den Grenzwert mit einer anderen Methode.

Hinweis: $f(x) = \frac{x}{\sin x} \cdot x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Übungsaufgabe 212 (T). Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung von $f(x) \sin x \, e^x$ durch

$$\begin{cases} (-4)^k \sin x \; e^x & \text{wenn } n = 4k \\ (-4)^k (\cos x + \sin x) e^x & \text{wenn } n = 4k+1 \\ (-4)^k 2 \cos x \; e^x & \text{wenn } n = 4k+2 \\ (-4)^k 2 (\cos x - \sin x) e^x & \text{wenn } n = 4k+3 \end{cases}$$

gegeben ist.

Übungsaufgabe 213 (T*). Finden Sie eine Reihendarstellung für π, indem Sie die Taylorreihe für die Arcustangens-Funktion an der Stelle $x = \frac{\pi}{4}$ auswerten.

Übungsaufgabe 214 (T*). Wie Aufgabe 213 aber für die Stelle $x = \frac{\pi}{6}$. *Hinweis:* $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Übungsaufgabe 215 (T). Zeigen Sie die Gültigkeit der trigonometrischen Formel

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \quad \text{für } xy < 1.$$

Hinweis: Rechnen Sie durch explizites Differenzieren nach, dass die linke und die rechte Seite dieser Gleichung dieselbe Ableitung haben. Was ist danach noch zu tun?

Übungsaufgabe 216 (T). Leiten Sie die Ableitungen der hyperbolischen Funktionen sinh und cosh direkt aus ihren Definitionen über die Exponentialfunktion her.

Übungsaufgabe 217 (T*). Erklären Sie ausführlich, wie man die Formeln für die Ableitungen der Areafunktionen erhält.

Übungsaufgabe 218 (E)**.** Wir betrachten die Funktion $T_c(x) := cx(1-x)$ auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ für jene Werte von c, für die $T_c : [0,1] \to [0,1]$ gesichert ist, also für $c \in [0,4]$. Für kleine Werte von c lässt sich das Verhalten der Iterationsfolgen $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_{n+1} := T_c(x_n)$, in Abhängigkeit vom Anfangswert x_0 noch sehr gut überblicken. Wenn sich c aber dem Wert 4 annähert, wird die Situation immer verwickelter.
Für die jeweils angegebenen Bereiche für c sind möglichst viele der folgenden Fragen zu beantworten:

- Welche Fixpunkte hat T_c? (Es gibt nie mehr als 2 Fixpunkte.)
- Für welche Anfangswerte konvergiert die Iterationsfolge gegen welchen Fixpunkt?
- Gibt es abgesehen von Fixpunkten periodische Punkte?
- Für welche Anfangswerte landet man irgendwann in einem periodischen Punkt?
- Gibt es Iterationsfolgen, die sich irgendwann periodischen Iterationsfolgen annähern?
- Gibt es Iterationsfolgen, die keinem der obigen Typen zuzuordnen sind?

Je nach c sind diese Fragen unterschiedlich schwierig. In manchen Fällen werden Sie vermutlich nicht alle Fragen beantworten können. Unterscheiden Sie folgende Bereiche für c:

(a) $0 \leq c \leq 1$. (Dieser Fall sollte sehr einfach sein.)

(b) $1 < c \leq 2$. (Immer noch einfach.)

(c) $2 < c \leq 1+\sqrt{3}$. (Schon anspruchsvoller, aber lösbar. Welche Rolle spielt dabei $1+\sqrt{3}$?)

(d) $1+\sqrt{3} < \lambda \leq 3$. (Ähnliches Ergebnis wie für $2 < c \leq 1+\sqrt{3}$, die Analyse ist aber um einiges verwickelter.)

(e) $3 < c \leq 4$. (Wer diesen Fall vollständig versteht, kann berühmt werden. Versuchen Sie wenigstens herauszubekommen, was sich gegenüber den bisherigen Fällen verändert.)

Übungsaufgabe 219 (T)**.** Berechnen Sie $\sqrt{2}$ mittels Intervallschachtelung auf zwei Nachkommastellen genau.

Übungsaufgabe 220 (T)**.** Berechnen Sie $\sqrt[3]{2}$ mittels Newtonverfahren und ohne Taschenrechner auf zwei Nachkommastellen genau.

Übungsaufgabe 221 (T)**.** Gesucht sind Lösungen der Gleichung $3x = e^x$.

(a) Begründen Sie, warum es im Intervall $[0,1]$ genau eine Lösung gibt.

(b) Berechnen Sie diese Lösung ohne Taschenrechner auf zumindest eine Nachkommastelle genau.

Hinweis: Verwenden Sie Intervallschachtelung und nützen Sie aus, dass die Exponentialreihe sehr schnell konvergiert, d.h. dass Sie nur wenige Terme addieren müssen, um die geforderte Genauigkeit zu erreichen.

(c) Suchen Sie die Lösung mit Hilfe des Newtonverfahrens.

Übungsaufgabe 222 (E)**.** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton und $a < x_0 < b$. Zeigen Sie, dass in x_0 sowohl der linksseitige Grenzwert $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ von f existieren. Ist f in x_0 unstetig, so liegt also eine Sprungstelle vor.
Anleitung: Betrachten Sie im monoton wachsenden Fall $\sup_{x<x_0} f(x)$ und $\inf_{x>x_0} f(x)$.

Übungsaufgabe 223 (B)**.** Erklären Sie, warum die Aussage der Übungsaufgabe 222 nicht selbstverständlich ist, indem Sie ein Beispiel einer nicht monotonen Funktion bringen, für welche die Aussage falsch ist.

Übungsaufgabe 224 (T)**.** Gegeben sei die reelle Funktion

$$f(x) = (x^2 - 1)e^x.$$

Fertigen Sie eine möglichst aussagekräftige Skizze des Graphen dieser Funktion an. Dazu ist es u.a. hilfreich, sich folgendes zu überlegen:

- Wo ist f überhaupt definiert?
- Hat der Graph von f Sprünge oder Knicke?
- Hat f Polstellen und wenn ja, wie verhält sich f in der Nähe eines Pols?
- Hat f Asymptoten und wenn ja, wie sehen diese aus?
- Ist f (stückweise) monoton?
- Hat f lokale bzw. globale Extremstellen?
- Wie sieht der Wertebereich von f aus, werden manche Wert gar nicht oder mehrfach angenommen?

Übungsaufgabe 225 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 224, aber mit $f(x) = \ln(1 + x^2) - \frac{3x}{5} + 1$.

Übungsaufgabe 226 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 224, aber mit $f(x) = \ln(\cos x)$.

Übungsaufgabe 227 (T)**.** Wie Übungsaufgabe 224, aber mit $f(x) = |x \ln x|$.

Übungsaufgabe 228 (E)**.** Verwenden Sie die Funktion $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := 0$, um zu illustrieren, dass es unendlich oft differenzierbare Funktionen gibt, deren Extremwertverhalten nicht mit den Werten der ihrer Ableitungen allein geklärt werden kann.

Übungsaufgabe 229 (T*)**.** Berechnen Sie die Krümmung κ der Parabel $f(x) := x^2$ in einem beliebigen Punkt (x_0, x_0^2).

Übungsaufgabe 230 (E)**.** Beschreiben Sie einen oberen Halbkreis mit Radius r als Funktion f und nehmen Sie ein beliebiges x_0 aus dem Inneren des Definitionsbereichs von f an. Berechnen Sie die Krümmung von f an x_0 und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Übungsaufgabe 231 (E)**.** Berechnen Sie für die Ellipse mit Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (d.h. mit Halbachsen $a, b > 0$) die Krümmung an den Punkten $(\pm a, 0)$ und $(0, \pm b)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis! (Stichwort: Schmiegekreise.)

Integralrechnung

Übungsaufgabe 232 (B)**.** Sei $f(x) := x$ auf $[a, b] := [0, 1]$ und $Z(n) := \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1 - \frac{1}{n}, 1\}$. Berechnen Sie die Ober- und Untersummen $O(f, Z(n)), U(f, Z(n))$ und damit das Integral $\int_0^1 x\,dx$.

Übungsaufgabe 233 (T)**.** Berechnen Sie das Riemann-Integral $\int_1^2 (2 - x)\,dx$ mittels äquidistanter Riemann-Summen.

Übungsaufgabe 234 (T*)**.** Berechnen Sie das Riemann-Integral $\int_0^1 e^x\,dx$ mittels äquidistanter Riemann-Summen. Verwenden Sie dazu die Summenformel für die geometrische Reihe.

Übungsaufgabe 235 (E)**.** Sei f stetig mit einer Stammfunktion F. Außerdem seien $a(x)$ und $b(x)$ differenzierbare Funktionen. Wir definieren die Funktion

$$G(x) := \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\, dt.$$

(a) Nehmen Sie zunächst a als konstante Funktion an. Begründen Sie, warum G differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung G'. Anleitung: Fassen Sie G als Verkettung $G = F \circ b$ auf.

(b) Analog mit konstantem b aber nicht konstantem a.

(c) Behandeln Sie nun den allgemeinen Fall, wo weder a noch b konstant sein müssen.

Übungsaufgabe 236 (T)**.** Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, um zu entscheiden ob F eine Stammfunktion von f ist:

(a) $f(x) = -\sin(x^2)$ und $F(x) = \int_x^0 \sin(t^2)\, dt$.

(b) $f(x) = -\sin(x^2)$ und $F(x) = \int_x^0 2t\cos(t^2)\, dt$.

(c) $f(x) = 2\sin^3$ und $F(x) = \int_0^{2x} 3\sin^2 t \cos t\, dt$.

(d) $f(x) = e^{x^2}$ und $F(x) = 4\int_1^{x/2} te^{4t^2}\, dt$.

Übungsaufgabe 237 (E)**.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und D von der Form $D = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i)$ mit $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n$. Weiters sei F eine Stammfunktion von f.

(a) Beschreiben Sie das unbestimmte Integral $\int f\, dx$ als Menge aller Stammfunktionen von f. *Hinweis:* Für jeden zusammenhängenden Teilbereich von D ist eine eigene additive Konstante zu nehmen.

(b) Für welche Intervalle $[a, b]$ ist das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\, dx$ definiert, und wie lässt es sich aus den gegebenen Daten berechnen?

Übungsaufgabe 238 (B)**.** Die **Signumfunktion** ist bekanntlich definiert durch $\operatorname{sgn}(x) := -1$ für $x < 0$, $\operatorname{sgn}(0) := 0$ und $\operatorname{sgn}(x) = 1$ für $x > 0$ definiert.

(a) Hat $\operatorname{sgn}(x)$ eine Stammfunktion?

(b) Verallgemeinern Sie Ihre Antwort auf beliebige Funktionen mit Sprungstellen.

(c) Finden Sie eine Funktion mit einer Unstetigkeit anderer Art, die sich in Hinblick auf die Existenz von Stammfunktionen anders verhält als sgn.

Übungsaufgabe 239 (T)**.** Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2-1)}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dy}{y(y^2+1)}$ (c) $\displaystyle\int \frac{z^2+z+1}{z(z^2+1)} dz$

Übungsaufgabe 240 (T)**.** Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mit Hilfe partieller Integration:

(a) $\int (\ln x)^2\, dx$ (b) $\int y^2 \sin y\, dy$ (c) $\int z \cos^2 z\, dz$

Übungsaufgabe 241 (T)**.** Wie die vorige Aufgabe, aber mit

(a) $\displaystyle\int x^2 e^x\, dx$ (b) $\displaystyle\int x \ln x\, dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\, dx$

Übungsaufgabe 242 (T*)**.** Ermitteln Sie mit Hilfe der Integralrechnung die Fläche der Ellipse mit Halbachsen $a, b > 0$.

Übungsaufgabe 243 (T)**.** Berechnen Sie die unbestimmten Integrale mit Hilfe geeigneter Substitutionen:

(a) $\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$ (b) $\int \tan y\,dy$ (c) $\int \sin(\ln z)\,dz$

Übungsaufgabe 244 (T)**.** Wie die vorige Aufgabe, aber mit

(a) $\displaystyle\int x^3\sqrt{x-1}\,dx$ (b) $\displaystyle\int \sin x\cos^3 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$

Übungsaufgabe 245 (T)**.** Berechnen Sie das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty x\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$$

Übungsaufgabe 246 (T)**.** Weisen Sie nach, dass

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^\alpha}\,dx$$

genau für $\alpha < 1$ einen endlichen Wert besitzt.

Übungsaufgabe 247 (T*)**.** Benutzen Sie ein Vergleichsargument, um zu zeigen, dass die Integrale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$$

endlich sind.

Übungsaufgabe 248. (P) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\lim_{\substack{s\to 0^+\\ t\to\infty}} \int_s^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ einen endlichen Grenzwert besitzt. *Anleitung:* Formen Sie $\int_s^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ mittels partieller Integration so um, dass ersichtlich wird, warum

$$\left|\int_s^t \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{2}{s}.$$

Übungsaufgabe 249 (T)**.** Entscheiden Sie, ob die unendliche Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln(n)}$ konvergiert oder divergiert.

Übungsaufgabe 250 (E)**.** Berechnen Sie für $N = 10, 100, 1000, \ldots, 10^k$ die endliche Summe $s_N := \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ unter Verwendung geeigneter Integrale und ohne Computersoftware näherungsweise. Geben Sie möglichst gute Fehlerabschätzungen an.

Übungsaufgabe 251 (E)**.** Leiten Sie eine einfache Variante der Stirling'schen Formel her, indem Sie

$$\ln n! = \sum_{k=1}^n \ln k$$

verwenden und diese Summe mit ähnlichen Methoden approximieren wie in Übungsaufgabe 250.

Übungsaufgabe 252 (T*)**.** Vergleichen und diskutieren Sie am Beispiel des bestimmten Integrals $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx$ verschiedene numerische Integrationsmethoden:

(a) Geben Sie den exakten Wert des Integrals auf zwei Nachkommastellen an.

(b) Berechnen Sie Ihnen geeignet erscheinende Ober-, Unter- und Riemannsummen zu äquidistanten Zerlegungen des Integrationsintervalls in $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Teile.

(c) Wenden Sie auf dieselben Zerlegungen die Trapezregel an.

(d) Ersetzen Sie $\cos x$ durch sein quadratisches Taylorpolynom t_2 mit Entwicklungsstelle $x_0 = 0$ und berechnen Sie das Integral $\int_{-\pi}^{\pi} t_2(x) \, dx$.

(e) Ersetzen Sie $\cos x$ durch sein quadratisches Interpolationspolynom an den Stützstellen $-\pi, 0, \pi$.

(f) Genauso, nur mit variierenden Stützstellen $-a, 0, a$ $(0 < a < \pi)$.

Übungsaufgabe 253 (E)**.** Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ wird auch als Gauß'sche Glockenkurve bezeichnet. Berechnen Sie näherungsweise die Fläche unter der Gauß'schen Glockenkurve indem Sie folgende Schritte ausführen:

(a) Geben Sie sich eine Genauigkeit ε vor, z.B. $\varepsilon = 0{,}01$ und suchen Sie einen Wert $M > 0$ sodass $f(x) < \varepsilon$ für $x \notin [-M, M]$.

(b) überlegen Sie, wann die Ungleichung $e^{-x^2} < e^{-|x|}$ gilt und schätzen Sie damit die Fläche der Glockenkurve außerhalb des Intervalls $[-M, M]$ ab.

(c) Ersetzen Sie auf dem Intervall $[-M, M]$ die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2}$ durch ihr Taylorpolynom $T_{f,n,0}$. Bestimmen Sie den Grad n so groß, dass $T_{f,n,0}$ auf dem Intervall $[-M, M]$ nicht negativ wird und führen Sie eine Fehlerabschätzung $|f - T_{f,n,0}|$ auf $[-M, M]$ durch!

(d) Berechnen Sie mit den konkreten Werten M und n, die Sie erhalten haben, das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2} dx \approx \int_{-M}^{M} T_{f,n,0}(x) \, dx$$

und geben Sie eine Abschätzung des dabei gemachten Fehlers an.

Übungsaufgabe 254 (E)**.** Skizzieren Sie die Koch'sche Kurve[7] und illustrieren Sie an diesem Beispiel die Problematik (un)endlicher Kurvenlänge.

Übungsaufgabe 255 (T)**.** Berechnen Sie die Länge einer Parabel, die durch den Funktionsgraphen von $f(x) = x^2$ gegeben ist, im Bereich $0 \leq x \leq a$.

Hinweis: Im auftretenden Integral bietet sich die Substitution $x = \sinh t$ an.

Übungsaufgabe 256 (T)**.** Berechnen Sie die Bogenlänge des Funktionsgraphen der Funktion

$$f(x) = \operatorname{arcosh} \tfrac{1}{x} - \sqrt{1 - x^2}, \quad \text{fr} \quad x \in [\tfrac{1}{e}, 1].$$

Übungsaufgabe 257 (T)**.** Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve

$$x(t) = t\cos(t), y(t) = t\sin(t), \qquad \text{für } t \in [0, \pi].$$

Übungsaufgabe 258 (E)**.** Welche Integrale treten bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse auf, welche bei einer Hyperbel? (Sie müssen diese Integrale nicht ausrechnen.)

[7] Eine Illustration finden Sie z.B. auf Wikipedia.