Wahrscheinlichkeitstheorie & Statistik

MATHEMATIK macht FREU(N)DE

Vorkurs 2019

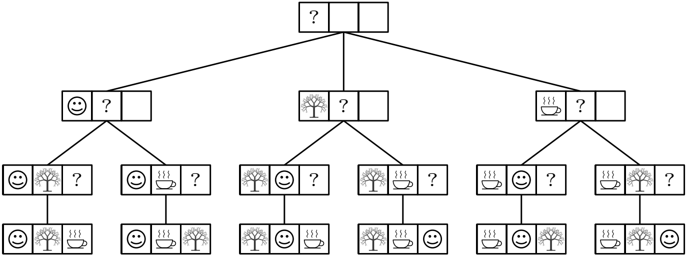
PH NÖ PÄDAGOGISCHE HOCHSCHULE NIEDERÖSTERREICH

universität wien

Folien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/vorkurs

Kombinatorik

- Wie viele Möglichkeiten gibt es, 3 unterscheidbare Objekte ☺, 🌳 und ☕ in einer Reihe anzuordnen?

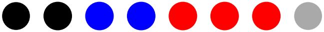


- Fakultät (Faktorielle)

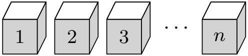
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

- **Anordnungsprobleme**: Kugeln in einer Reihe anordnen

  Wie viele verschiedene Farbmuster sind möglich?

Kugeln	Anzahl Farbmuster
	$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \binom{5}{3}$
	$\frac{8!}{2! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 1!}$

- **Auswahlprobleme**: Kugeln auf Boxen verteilen

k Kugeln, n unterscheidbare Boxen: 

Wie viele verschiedene Verteilungen sind möglich?

Die Antwort hängt davon ab, ob ...

1. ... die Kugeln durchnummeriert oder alle gleich sind.
2. ... in jede Box nur eine oder beliebig viele Kugeln passen.

Reihenfolge wichtig?

- Ja → Mehrfachauswahl erlaubt?
  - Ja → n^k
  - Nein → $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$
- Nein → Mehrfachauswahl erlaubt?
  - Ja → $\binom{k+n-1}{n-1}$
  - Nein → $\binom{n}{k}$

AB – Kombinatorik

Laplace-Experimente

Mit welcher Wahrscheinlichkeit würfelt man ...

- ... mit einem gewöhnlichen Spielwürfel *genau* die Augenzahl 5?
- ... mit einem gewöhnlichen Spielwürfel *mindestens* die Augenzahl 5?

- ... mit 2 Spielwürfeln *genau* die Augensumme 10?
- ... mit 2 Spielwürfeln *mindestens* die Augensumme 10?

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	2	3	4	5	6	7
⚁	3	4	5	6	7	8
⚂	4	5	6	7	8	9
⚃	5	6	7	8	9	10
⚄	6	7	8	9	10	11
⚅	7	8	9	10	11	12

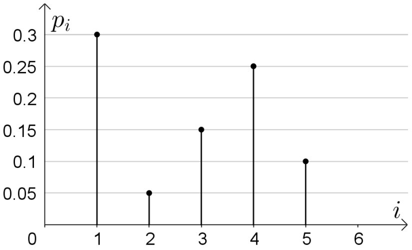
$$\frac{\textbf{Anzahl günstige Ergebnisse}}{\textbf{Anzahl mögliche Ergebnisse}}$$

AB – Laplace-Experimente

Wir würfeln mit einem *gezinkten* 6-seitigen Würfel.

Ergebnisraum: $\Omega = \{$⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅$\}$

Wahrscheinlichkeiten der Augenzahlen von 1 bis 5:



Wie wahrscheinlich ist es, mit diesem gezinkten Würfel ...

- ... *genau* die Augenzahl 6 zu würfeln?
- ... *mindestens* die Augenzahl 5 zu würfeln?

Zufallsvariablen

Würfle mit einem gewöhnlichen Spielwürfel und gewinne das 10-fache der gewürfelten Augenzahl in €.

Die **Zufallsvariable *X*** gibt den Gewinn in € an.
Der Wert von X hängt vom Würfelergebnis ab:

Zufall 

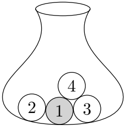
Ω = {⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅} z. B. ⚄ $\xmapsto{\text{Zufallsvariable } X}$ X(⚄) = 50 €

mögliche Ergebnisse — Ergebnis des Zufallsexperiments

Formal ist die Zufallsvariable also eine Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 42\,€)$?

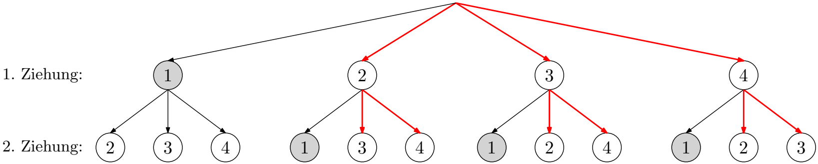
AB – Zufallsvariablen



Urne: 1 graue Kugel, 3 weiße Kugeln
Zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen

Wie wahrscheinlich ist es, dass beide Kugeln weiß sind?

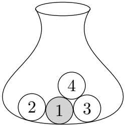
Lösungsmöglichkeit 1: Laplace-Experiment



$$\frac{\text{Anzahl günstige Pfade}}{\text{Anzahl mögliche Pfade}} = \ ?$$

AB – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten

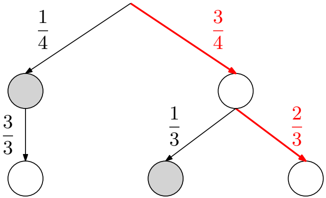
Baumdiagramme



Urne: 1 graue Kugel, 3 weiße Kugeln
Zwei Kugeln ohne Zurücklegen ziehen

Wie wahrscheinlich ist es, dass beide Kugeln weiß sind?

Lösungsmöglichkeit 2: Pfadregel (Multiplikationsregel)

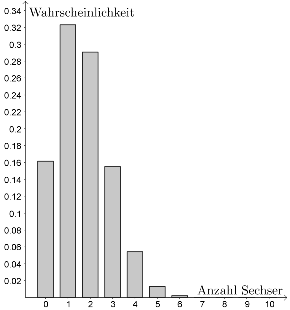


$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

Binomialverteilung

$n = 10$ Mal einen gewöhnlichen Spielwürfel werfen

$X \ldots$ Anzahl gewürfelter Sechser



Unabhängig von den anderen Würfen:

Bei *jedem* Wurf ist die WS
für einen Sechser $p = \frac{1}{6}$.

$$P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 16{,}15\ldots\,\%$$

X ist **binomialverteilt** mit Parametern $n = 10$ und $p = \frac{1}{6}$.

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{6}\right)^{k} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}}}$$

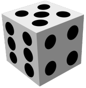
WS von jedem Pfad mit genau k Sechsern (1. Pfadregel)

Anzahl Pfade mit genau k Sechsern (Kombinatorik und 2. Pfadregel)

AB – Binomialverteilung

Normalverteilung

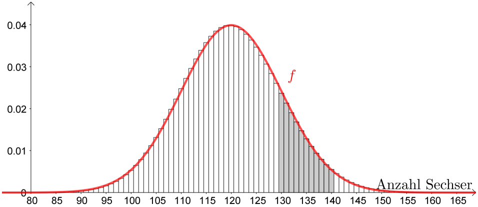
$n = 720$ Mal einen gewöhnlichen Spielwürfel werfen



X ... Anzahl gewürfelter Sechser
X ist **binomialverteilt** mit Parametern $n = 720$ und $p = \frac{1}{6}$.

Säulendiagramm:

Annäherung durch
Dichtefunktion f



X ist *näherungsweise* **normalverteilt** mit Parametern
$\mu = n \cdot p = 120$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 10.$

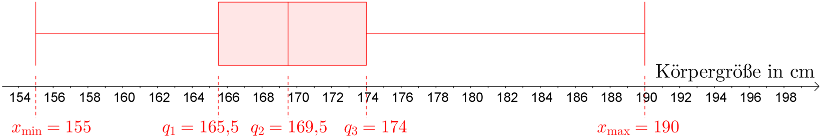
$$P(130 \leq X \leq 140) \approx \int_{129{,}5}^{140{,}5} f(x)\ \mathrm{dx}$$

AB – Normalverteilung

Statistik

155	156	156	158	158	158	159	161	162	162	162	163	163	163	164	164	165	165	165	165
166	166	166	166	166	166	166	167	167	167	167	168	168	168	169	169	169	169	169	169
170	170	170	170	170	171	171	171	171	172	172	172	172	172	173	173	174	174	174	174
174	174	175	176	176	177	178	178	178	179	179	180	180	180	180	182	184	188	188	190

- Arithmetisches Mittel
- Median
- Unteres/Oberes Quartil
- 12,5 %-Quantil
- Spannweite
- Interquartilsabstand
- Boxplot



AB – Statistische Kenngrößen und Boxplot

Überblick zu den Kompetenzmaterialien

Paket 1
- KH – Kombinatorik
- AB – Kombinatorik

Paket 2
- KH – Stochastik I
- AB – Laplace-Experimente
- AB – Zufallsexperimente und WS-Räume
- AB – Zufallsvariablen

Paket 3
- KH – Stochastik II
- AB – Baumdiagramme und Wahrscheinlichkeiten
- AB – Binomialverteilung

Paket 4
- KH – Stochastik III
- AB – Normalverteilung

Paket 5
- KH – Statistik I
- AB – Relative Häufigkeiten und Baumdiagramme
- AB – Statistische Kenngrößen und Boxplot

Kompetenzmaterialien online verfügbar: mmf.univie.ac.at/materialien