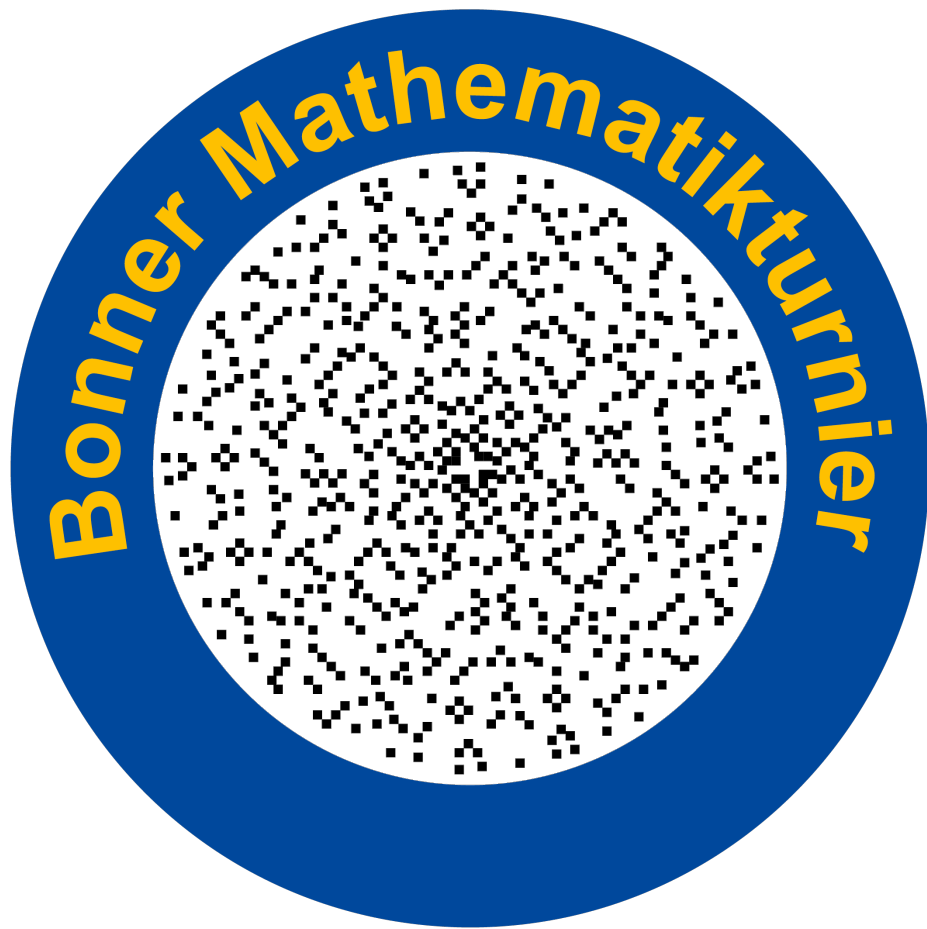




Orthogonalität und Approximation – vom Lotfällen bis zum JPEG-Format

Internationales Mathematikturnier 2025
Vorbereitungsmaterial

19. September 2025



Radboud Universiteit



universität
wien

Liebe Teilnehmer*innen des Mathematikturniers 2025,

in ein paar Wochen ist es so weit, und ihr könnt am Mathematikturnier teilnehmen. Die erste Runde dieses Turniers heißt „Sum of Us“ und behandelt in diesem Jahr das Thema Orthogonalität und Approximation – vom Lotfällen bis zum JPEG-Format. Hierauf könnt ihr euch mit dem Übungsmaterial dieses Dokuments vorbereiten. Eure Lehrkräfte sind bestimmt bereit, euch hierbei zu helfen!

Die Unterlagen wurden in diesem Jahr unter Begleitung von Stefan Hartmann und Rainer Kaenders von Nicola Hauptmann im Rahmen ihrer Bachelorarbeit an der Universität Bonn geschrieben. Als primäre Quelle wurde das Buch „Orthogonalität und Approximation“ (Springer Spektrum, 2012) von Johanna Heitzer verwendet.

Die Organisationsteams,

Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)

Michael Gruber, Thorsten Holm, Florian Leydecker & Victor González Alonso (Leibniz Universität Hannover)

Niels Bonneux & Joeri Van der Veken (KU Leuven)

Peter Hochs & Sep Thijssen (Radboud Universiteit Nijmegen)

Michael Eichmair, Robin Gludovatz & Dmytro Rzhemuvskyi (Universität Wien)

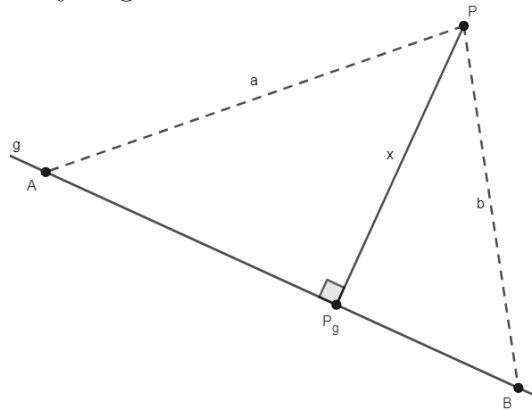
Inhaltsverzeichnis

1	Pythagoras	4
2	Vektorräume	5
2.1	Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$	6
2.2	Linearkombination	7
2.3	Vektornorm $\ \vec{v}\ $	9
2.4	Abstände	10
2.5	Der Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^2$	10
2.6	Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$	11
2.7	Vektoren im $\mathbb{R}^3$	13
2.8	Basis	14
2.9	Unterräume	16
2.9.1	Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen	16
2.9.2	Orthogonale Projektion auf eindimensionale Unterräume	20
2.9.3	Orthogonale Projektion auf zweidimensionale Unterräume	21
2.9.4	Gram-Schmidt-Verfahren	24
2.10	Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$	25
3	Anwendungen im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$	29
3.1	Dimensionsreduktion bei Datenmengen	29
3.2	Anpassung von Funktionen an Messreihen	31
3.2.1	Die beste lineare Approximation	31
4	Der Haar-Algorithmus	34
4.1	Spaltenvektoren und stückweise konstante Funktionen	34
4.2	Die Haar-Basis	38
4.3	Relativer Fehler	42
4.4	Thresholding	43
4.5	Haar-Algorithmus	45
4.6	Bildverarbeitung	48
5	Anhang	53
5.1	Skalarprodukt und Winkel	53
5.2	Beweis: Eindeutigkeit der Dimension	55
5.3	Anpassung von Funktionen an Messreihen	56
5.3.1	Die beste lineare Approximation im Raum der stückweise konstanten Funktionen	57
5.3.2	Verallgemeinerungen auf ganzrationale Funktionen vom Grad k	58
5.4	Lösungen	61

1 Pythagoras

Grundlage von allen hier beschriebenen Approximationen ist die einfache Tatsache, dass der kleinste Abstand zwischen zwei Objekten, beispielsweise der Abstand eines Punktes und einer Geraden, durch das Fällen des Lotes gefunden wird. Vielleicht erscheint das zunächst offensichtlich. Wir wollen uns dennoch näher damit auseinandersetzen, da diese einfache Tatsache uns bis hin zu sehr modernen Anwendungen, wie beispielsweise der Bildverarbeitung, begleiten wird.

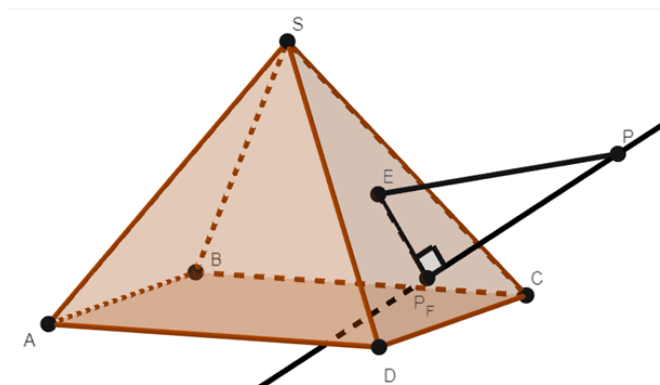
Wir betrachten den Satz des Pythagoras:



Fällt man von einem Punkt P das Lot auf eine Gerade g , so ist der dort liegende Punkt P_g der Punkt auf g mit dem geringsten Abstand zu P . Sei A ein fester beliebiger Punkt auf der Geraden g , der verschieden von P_g ist. Es gilt $\angle PP_g A = 90^\circ$ und somit der Satz des Pythagoras für das Dreieck $PP_g A$: $|PP_g|^2 + |P_g A|^2 = |AP|^2$. Da A von P_g verschieden ist, ist $|P_g A|^2 > 0$ und somit auch $|AP| > |PP_g|$.

Dies gilt ebenso im dreidimensionalen Raum:

Wir betrachten eine Pyramide und bezeichnen die Pyramidenfläche mit den Eckpunkten S , D und C als Fläche F . Sei P_F der Punkt auf F , der entsteht, wenn man von P auf F das Lot fällt. Auch nun spannt jeder von P_F verschiedene Punkt E auf F ein rechtwinkliges Dreieck auf, bei dem die Strecke $\overline{PE}$ die Hypotenuse und somit die längste Seite ist.



Wie wir im folgenden Kapitel sehen werden, lässt sich diese Tatsache auch auf höhere Dimensionen übertragen, auch wenn wir von diesen keine Vorstellung mehr haben. Besonders beeindruckend wird sein, dass wir auch in vier, fünf, und sogar in beliebig hohen Dimensionen mit einfachen Rechnungen, die stets auf dem Satz des Pythagoras beruhen, kleinste Abstände zwischen abstrakten Objekten finden können.

2 Vektorräume

In diesem Kapitel werden wir die nötigen mathematischen Grundlagen kennenlernen, um diese später in verschiedenen Kontexten anwenden zu können.

Vektorräume über den reellen Zahlen

Ein Vektorraum über den reellen Zahlen beschreibt eine Menge von mathematischen Objekten, die wir Vektoren nennen. Wie genau diese Vektoren aussehen können, werden wir in diesem Kapitel noch sehr genau kennenlernen. Wir schreiben Vektoren mit einem Pfeil über ihren Variablen, um sie als solche zu kennzeichnen, zum Beispiel $\vec{v}$ oder $\vec{w}$. In einem reellen Vektorraum V sind folgende Eigenschaften für beliebige Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ erfüllt:

- Es gibt eine Vektoraddition $\vec{v} + \vec{w}$, sodass das Ergebnis stets wieder ein Vektor des Vektorraumes ist.
- Die Addition von Vektoren ist kommutativ:

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$$

- Die Addition von Vektoren ist assoziativ:

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

- Es gibt einen Nullvektor $\vec{0}$. Addiert man ihn mit einem beliebigen anderen Vektor, bleibt dieser unverändert:

$$\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$$

- Zu jedem Vektor $\vec{v}$ gibt es einen inversen Vektor $-\vec{v}$, der zusammen mit $\vec{v}$ addiert den Nullvektor ergibt:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$$

Wir werden oft einfach $\vec{v} - \vec{w}$ statt $\vec{v} + (-\vec{w})$ schreiben. Streng genommen gibt es aber in Vektorräumen keine Subtraktion, sie entspricht der Addition von inversen Vektoren.

- Wir können eine beliebige reelle Zahl λ mit einem Vektor $\vec{v}$ multiplizieren, sodass das Ergebnis $\lambda \cdot \vec{v}$ wieder ein Vektor des Vektorraumes ist. Diese Art der Multiplikation heißt Skalarmultiplikation, die reellen Zahlen werden auch Skalare genannt.
- Für die Skalarmultiplikation mit beliebigen Skalaren $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gelten die Distributivgesetze:

$$\lambda \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}) + (\lambda \cdot \vec{w}) \quad (\lambda + \mu) \cdot \vec{v} = (\lambda \cdot \vec{v}) + (\mu \cdot \vec{v})$$

- Es gilt

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{v})$$

- Für die Skalarmultiplikation der reellen Zahl 1 mit einem beliebigen Vektor gilt

$$1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

Wir schauen uns zunächst zwei Vektorräume an, zu denen wir eine gute bildliche Vorstellung haben.

2.1 Der Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Ihr könnt euch Vektoren zunächst als Pfeile vorstellen, die eine Bewegung im zweidimensionalen Koordinatensystem beschreiben. Sie haben eine Richtung und eine Länge und sind zunächst nicht an einen festen Ort im Koordinatensystem gebunden.

Die Richtung eines jeden solchen Vektors setzt sich aus einer Schrittweite in x -Richtung und einer Schrittweite in y -Richtung zusammen. Das Verhältnis dieser beiden Zahlen bestimmt die Richtung, die Größe der Zahlen die Länge des Vektors.

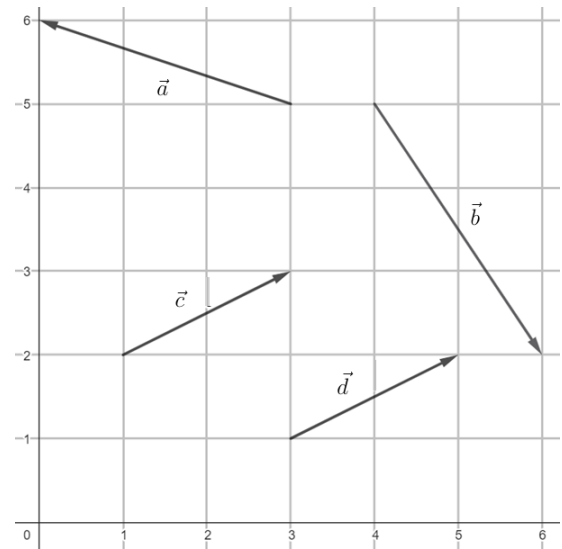
Die einzelnen Zahlen schreiben wir übereinander auf: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, wobei x und y reelle Zahlen sind.

Beispiele:

Der Vektor $\vec{a}$ im Bild rechts beschreibt die Bewegung, die sich aus -3 Schritten in x -Richtung und +1 Schritt in y -Richtung zusammensetzt, wir schreiben $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Somit ist $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der

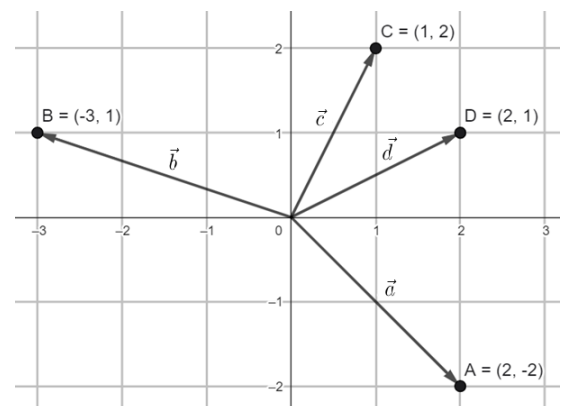
Vektor $\vec{d}$ ist zwar an anderer Stelle eingezeichnet, hat aber die gleiche Richtung und Länge wie $\vec{c}$. Deshalb gilt $\vec{c} = \vec{d}$.



Wir können Vektoren aber auch bewusst an einen bestimmten Punkt hängen, zum Beispiel an den Ursprung (0,0). Dann können wir jedem Punkt im Koordinatensystem einen Vektor zuordnen und die Werte dieser Vektoren entsprechen den Koordinaten des jeweiligen Punktes, zu dem der Vektor zeigt. Wir bezeichnen einen solchen Vektor auch als Ortsvektor von einem Punkt und identifizieren im Folgenden sehr häufig die Punkte im $\mathbb{R}^2$ mit ihren Ortsvektoren.

Beispiele:

Fixieren wir den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ am Ursprung, entspricht er dem Punkt $A(2, -2)$, $\vec{a}$ ist also der Ortsvektor von A . Das gleiche gilt für die Vektoren $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ mit den entsprechenden Punkten.



2.2 Linearkombination

Wir führen nun die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation ein. Anschließend wollen wir uns verdeutlichen, welche Bedeutung diese im $\mathbb{R}^2$ haben.

Vektoraddition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^2$

Seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ Vektoren des $\mathbb{R}^2$ und λ eine reelle Zahl.

Wir definieren die Vektoraddition und die Skalarmultiplikation wie folgt:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix} \quad \lambda \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot v_1 \\ \lambda \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Den Nullvektor $\vec{0}$ definieren wir als $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit gilt

$$\vec{0} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + v_1 \\ 0 + v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{v}$$

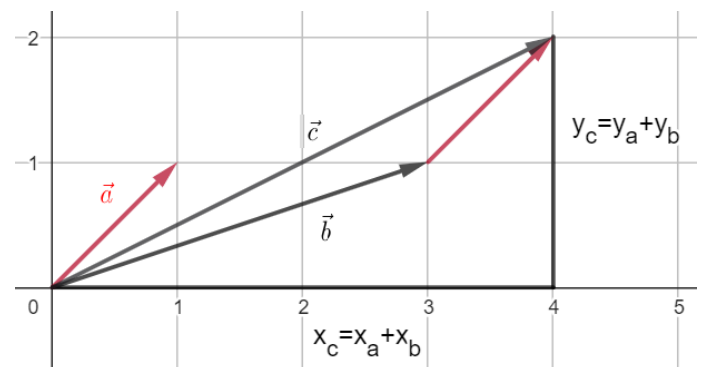
Achtung: Verwechslungsgefahr!

Wir verwenden dieselben Symbole „+“ und „·“ jeweils für zwei verschiedene Rechenarten. „+“ beschreibt einmal die Addition von reellen Zahlen und einmal die Addition von Vektoren, „·“ steht einmal für die reelle Multiplikation und einmal für die Skalarmultiplikation mit einem Vektor.

Addition:

Die paarweise Addition der einzelnen Komponenten entspricht dem Aneinanderhängen der Vektoren:

$$\vec{b} + \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \vec{c}$$

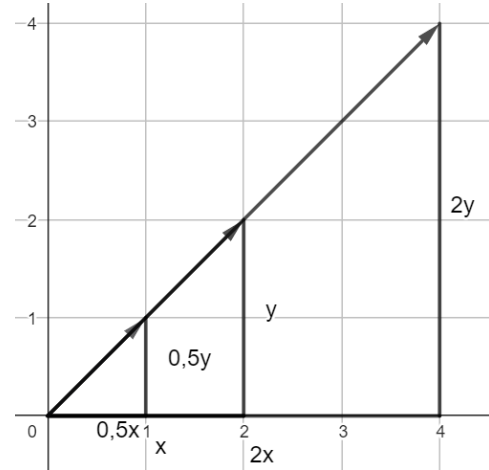


Skalarmultiplikation:

Wenn wir einen Vektor mit einer Zahl multiplizieren, werden die einzelnen Komponenten um den entsprechenden Faktor gestreckt oder gestaucht. Dabei bleibt das Verhältnis von x und y , und damit die Richtung gleich und es ändert sich nur die Länge des Vektors. $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \vec{v} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$0,5 \cdot \vec{v} = 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Ein Vektor, der als Summe von skalierten Vektoren entsteht, heißt **Linearkombination** dieser Vektoren.

Aufgabe 1 Berechnet folgende Linearkombinationen im $\mathbb{R}^2$:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + 37 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\frac{5}{8} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 33 \end{pmatrix}$

2.3 Vektornorm $||\vec{v}'||$

Die Länge eines Vektors bezeichnen wir als **Norm**. Sie wird durch doppelte Betragsstriche um den Vektor dargestellt. Im $\mathbb{R}^2$ berechnen wir sie ganz einfach mit dem Satz des Pythagoras:

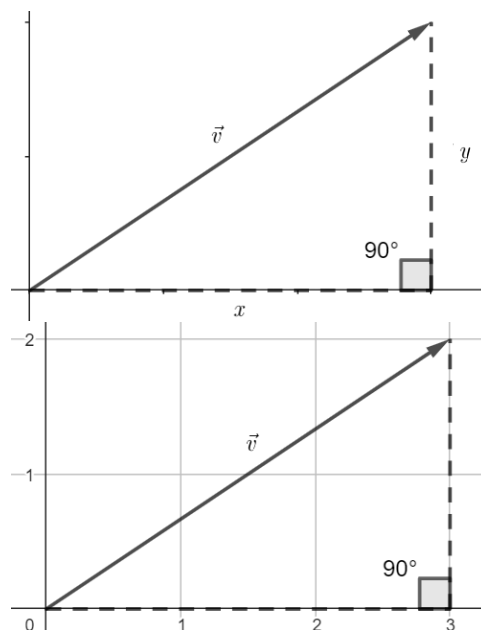
Für einen beliebigen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ gilt nach Pythagoras:

$$||\vec{v}'||^2 = x^2 + y^2, \text{ also: } ||\vec{v}'|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Beispiel:

Für den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt also:

$$||\vec{v}'|| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \approx 3,61$$



Oft ist es zum Rechnen praktischer, wenn ein Vektor die Länge 1 hat. Dafür normieren wir den Vektor, indem wir mit dem Kehrwert der Länge multiplizieren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{||\vec{a}'||} \cdot \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

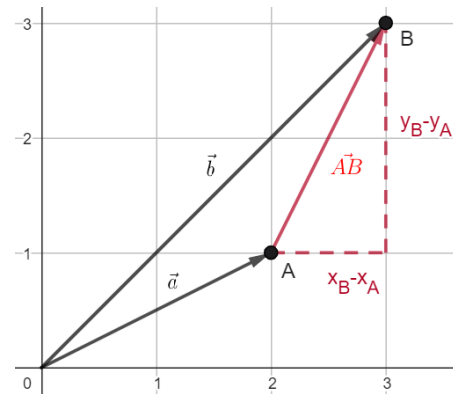
- Berechnet die Norm der Ergebnisse aus Aufgabe 1.
- Normiert die Vektoren aus Aufgabe 1.

2.4 Abstände

Wir können auch Strecken zwischen zwei Punkten durch Vektoren beschreiben.

Sei $\vec{AB}$ der Vektor zwischen den Punkten A und B . Wir wissen bereits, dass wir $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{AB}$ ausdrücken können. Es gilt:
 $\vec{a} + \vec{AB} = \vec{b} \iff \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

Wir ziehen also jeweils die x - und y -Werte der einzelnen Vektoren voneinander ab.



Beispiel: Seien $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Dann ist $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

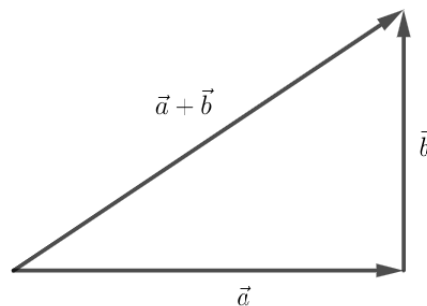
Für den Abstand zwischen zwei Vektoren berechnen wir demnach $\|\vec{b} - \vec{a}\|$:

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

Aufgabe 3

- Berechnet jeweils den Abstand zwischen den Punkte $A = (-4,11)$, $B = (7,7)$, $C = (1,0)$, $D = (-\frac{7}{2},2)$.
- Zeigt, dass $\|\vec{b} - \vec{a}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\|$ für alle Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt.

2.5 Der Satz des Pythagoras im $\mathbb{R}^2$



Wir können für Vektoren des $\mathbb{R}^2$ den Satz des Pythagoras umformulieren:

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 \iff \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind senkrecht zueinander.}$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht senkrecht zueinander, entsteht eine Abweichung

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 - \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 < 0$$

vom Satz des Pythagoras, die wir als **Pythagorasdefekt** bezeichnen.

2.6 Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$

Ein sehr zentrales Konzept, das uns bisher noch fehlt, ist das Skalarprodukt. Darunter verstehen wir ein Produkt, also eine Art Multiplikation, von Vektoren. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist allerdings nicht wieder ein Vektor, sondern eine reelle Zahl. Oft findet man auch die Schreibweise $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Wir werden hingegen $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ schreiben, da sich das Skalarprodukt so grundlegend von den bisherigen Rechenarten unterscheidet, dass wir dies durch unsere Schreibweise kennzeichnen möchten.

Wir betrachten im Folgenden die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$

Wir definieren das Skalarprodukt als die Hälfte des Pythagorasdefekts:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \frac{1}{2} \cdot (||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2)$$

Wenn wir den Ausdruck ausrechnen und vereinfachen, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 - (a_1^2 + a_2^2) - (b_1^2 + b_2^2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + b_2^2 - a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 - b_2^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_1 \cdot b_1 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2) \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 \end{aligned}$$

Berechnung des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^2$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können wir mit folgender Formel einfach berechnen:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

So wie wir das Skalarprodukt definiert haben, gibt es hauptsächlich Aufschluss darüber, inwiefern der Satz des Pythagoras gilt, bzw. ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen. Für unsere Theorie ist dies einer der grundlegendsten Aspekte und vor allem auch völlig ausreichend.

Man kann das Skalarprodukt jedoch darüber hinaus auch über den Kosinussatz definieren. Dadurch erhält man eine Formel, mit der die Größe des Skalarprodukts in Bezug gesetzt wird zum Winkel zwischen zwei Vektoren. In höheren Dimensionen kann man damit dann abstrakt Winkel zwischen Vektoren definieren. Ein Kapitel hierzu findet ihr im Anhang.

Orthogonalität

Wir schreiben $\vec{a} \perp \vec{b}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander sind. Wir sagen: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal**.

Es gilt:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Dies folgt sofort aus dem Satz des Pythagoras und $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{1}{2} \cdot (||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2)$.

Aufgabe 4

a) Zeigt durch eine entsprechende Rechnung, dass

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2.$$

b) Es sind die Ortsvektoren von jeweils drei Punkten im $\mathbb{R}^2$ gegeben. Prüft, ob es sich um die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks handelt, indem ihr die Skalarprodukte berechnet:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Bestimmt, wenn möglich, einen Vektor, der orthogonal ist zu

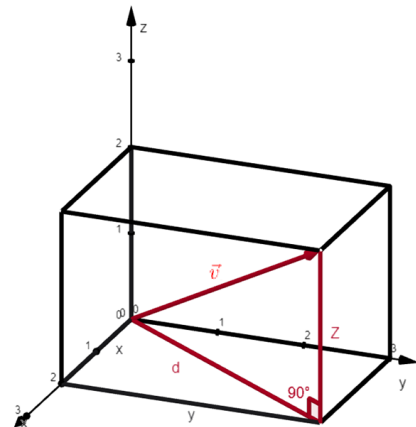
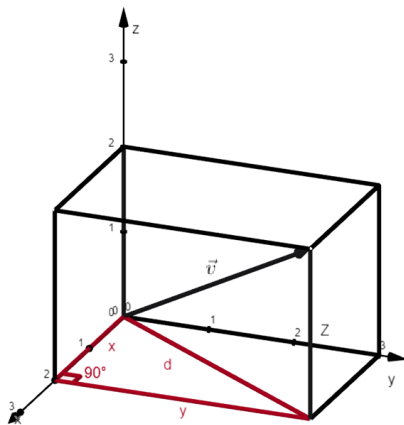
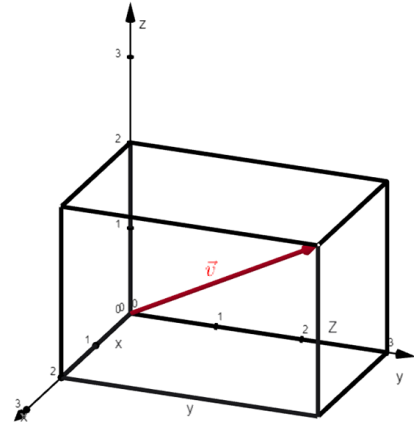
$$\text{i) } \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

2.7 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Im $\mathbb{R}^3$ kommt eine weitere Richtung hinzu, wir befinden uns jetzt im dreidimensionalen Raum. Hier bestehen die Vektoren aus drei Komponenten, da wir uns in drei Richtungen bewegen können. Diese neue Richtung nennen wir zunächst z -Richtung.

Die Vektoren haben nun also die Form $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,
wobei x , y und z reelle Zahlen sind.

Beispiel: Der hier rot gezeigte Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ setzt sich aus 2 Schritten in x -Richtung, 3 Schritten in y -Richtung und 2 Schritten in z -Richtung zusammen.



Auch hier berechnen wir die Länge des Vektors mit dem Satz des Pythagoras. Wir müssen ihn nun zweimal anwenden, und es gilt

$$d^2 = x^2 + y^2, \quad ||\vec{v}'||^2 = d^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + z^2, \text{ also: } ||\vec{v}'|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Für unseren Beispielvektor gilt also $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{17}$

Genau wie im $\mathbb{R}^2$ können wir den Satz des Pythagoras formulieren als

$$||\vec{a}'||^2 + ||\vec{b}'||^2 = ||\vec{a} + \vec{b}'||^2 \iff \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Wir definieren dann das Skalarprodukt erneut als den halben Pythagorasdefekt:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle := \frac{1}{2} \cdot (||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2)$$

Wenn wir das Skalarprodukt für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ausrechnen, so erhalten wir analog zur Formel für den $\mathbb{R}^2$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Auch hier gilt insbesondere

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2$$

Aufgabe 5

- a) Zeigt durch eine entsprechende Rechnung, dass $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ für Vektoren des $\mathbb{R}^3$ gilt.
- b) Zeigt, dass $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = ||\vec{a}||^2$ gilt.

2.8 Basis

Basis und Dimension

Als eine **Basis** eines Vektorraums bezeichnet man eine Menge von Vektoren des Raumes, den Basisvektoren, für die folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- Man kann jeden beliebigen Vektor des Vektorraums durch eine Linearkombination der Basisvektoren ausdrücken.
- Keiner der Basisvektoren kann durch eine Linearkombination der anderen dargestellt werden, oder anders gesagt: Keiner der Vektoren ist überflüssig. Wir können keinen Vektor aus der Basis entfernen, ohne dass die erste Eigenschaft verloren geht.

Ein Vektorraum hat nicht nur eine Basis.

In jeder Basis desselben Vektorraums sind immer gleich viele Vektoren. (Den Beweis hierfür findet ihr im Anhang.) Die Anzahl der Basisvektoren nennen wir **Dimension** des Vektorraums.

Beispiel 1:

Die am häufigsten verwendete Basis ist die sogenannte kanonische Basis. Wir haben sie im Grunde schon die ganze Zeit verwendet, ohne es überhaupt zu merken.

Im $\mathbb{R}^2$ setzt sie sich zusammen aus den Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im $\mathbb{R}^3$ sind es

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir können alle Vektoren des jeweiligen Raumes ganz einfach als Linearkombination der kanonischen Basis darstellen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Skalare, die in der Linearkombination mit den Basisvektoren multipliziert werden, heißen **Koeffizienten**. Die Besonderheit der kanonischen Basis ist, dass die Koeffizienten immer mit den einzelnen Komponenten des Vektors übereinstimmen.

Zum Beispiel gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Beispiel 2:

Ein Beispiel für eine andere Basis für den $\mathbb{R}^3$ ist $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Auf den Beweis, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Basis handelt, werden wir hier und für andere Beispiele im Vorbereitungsmaterial verzichten.

Wir können alle Vektoren des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination dieser Basisvektoren darstellen.

Um die Linearkombination für $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu berechnen, suchen wir $r, s, t \in \mathbb{R}$ so dass gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichung können wir als lineares Gleichungssystem lösen:

$$1 = r \cdot 1 + s \cdot 1 + t \cdot 1$$

$$2 = r \cdot 1 + s \cdot 1 + t \cdot 0$$

$$3 = r \cdot 1 + s \cdot 0 + t \cdot 0$$

mit der Lösung

$$r = 3 \quad s = -1 \quad t = -1$$

Dann gilt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 6

Stellt den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ als Linearkombination folgender Basis dar:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.9 Unterräume

Unterräume von reellen Vektorräumen

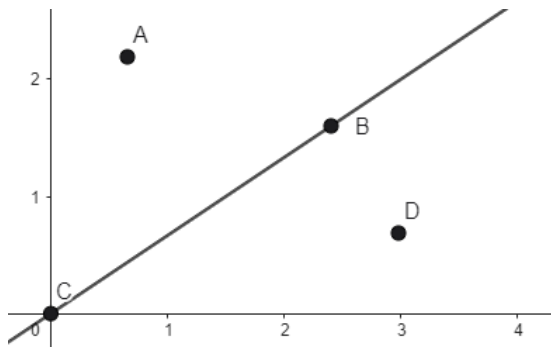
Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die alle Eigenschaften eines Vektorraum besitzt, wenn wir dort die gleichen Operationen (Vektoraddition und skalare Multiplikation) verwenden.

2.9.1 Ursprungsgeraden und Ursprungsebenen

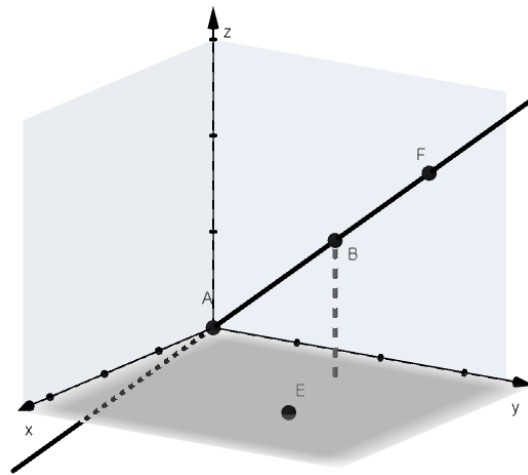
Ursprungsgeraden sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Der Nullvektor ist enthalten, da die Geraden alle durch den Ursprung verlaufen.

Da Unterräume ja ebenfalls Vektorräume sind, können auch sie durch eine Basis beschrieben werden. Bei Geraden reicht dazu jeweils ein Basisvektor aus, sie sind eindimensional. Dieser Basisvektor gibt die Richtung der Geraden an. Um zu prüfen, ob ein Vektor $\vec{v}$ in einem Unterraum U liegt, prüft man, ob es eine Linearkombination der Basisvektoren von U gibt, die gleich $\vec{v}$ ist.



Die Punkte B und C liegen im Unterraum der Geraden, A und D jedoch nicht.



Die Punkte A, B und F liegen im Unterraum der Geraden, E jedoch nicht.

Beispiel 1

Eine Ursprungsgerade g im $\mathbb{R}^2$ ist durch die Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

Für den Punkt $B = (4,2)$ gilt $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, er liegt auf g .

Wie sieht es mit $E = (2,2)$ aus?

Wenn E auf g liegen würde, müsste es ein $r \in \mathbb{R}$ geben so dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Die Gleichung können wir als lineares Gleichungssystem lösen:

$$2 = r \cdot 2$$

$$2 = r \cdot 1$$

Offensichtlich gibt es kein solches r und somit liegt E nicht auf g .

Beispiel 2

Eine Ursprungsgeraden h im $\mathbb{R}^3$ ist durch die Basis $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ gegeben.

Liegt der Punkt $P = (1, 2, \frac{3}{2})$ auf h ?

Das lineare Gleichungssystem

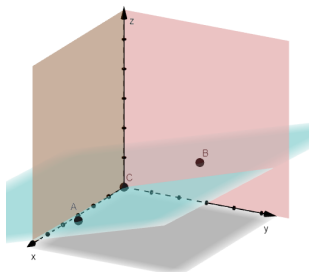
$$1 = r \cdot 2$$

$$2 = r \cdot 4$$

$$\frac{3}{2} = r \cdot 3$$

liefert uns $r = \frac{1}{2}$ und zeigt, dass $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ gilt. P liegt somit auf h .

Ursprungsebenen hingegen sind zweidimensionale Unterräume. Sie werden von zwei Basisvektoren „aufgespannt“.



In dieser Grafik sind vier Ursprungsebenen abgebildet. Wir fangen mit den drei offensichtlichsten an: die Ebenen, die jeweils von zwei Achsen eingeschlossen werden.

$$xy\text{-Ebene: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad yz\text{-Ebene: } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad xz\text{-Ebene: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die hier blaue Ebene ist z.B. $\begin{pmatrix} 3 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis.

Beispiel 3

Sei eine Ursprungsebene E durch ihre Basisvektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

Wir wollen prüfen, ob die Punkte $A = (-1, 9, 1)$ und $B = (2, 7, 4)$ in E liegen.

Für Punkt A stellen wir folgendes lineare Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} -1 &= r \cdot 2 + s \cdot (-1) \\ 9 &= r \cdot 0 + s \cdot 3 \\ 1 &= r \cdot 1 + s \cdot 0 \end{aligned}$$

Es hat die Lösung $r = 1, s = 3$, somit gilt $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und A liegt in E .

Das lineare Gleichungssystem für den Punkt B hat keine Lösung:

$$2 = r \cdot 2 + s \cdot (-1)$$

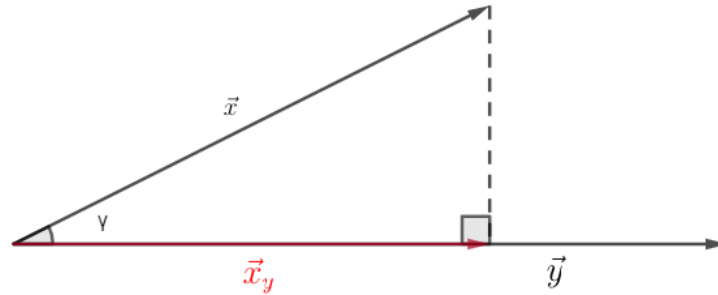
$$7 = r \cdot 0 + s \cdot 3$$

$$4 = r \cdot 1 + s \cdot 0$$

Für B gibt es also keine solche Linearkombination und B liegt nicht in E .

2.9.2 Orthogonale Projektion auf eindimensionale Unterräume

In diesem Unterkapitel wollen wir erkunden, wie wir mithilfe von den bisher erlernten Konzepten innerhalb eines Vektorraums das Lot auf eine Gerade fällen können. Wir bezeichnen das von nun an als Orthogonalprojektion: Wir *projizieren* einen Vektor orthogonal auf einen anderen, bzw. auf eine Gerade.



Wir betrachten eine Ursprungsgerade g mit Richtung $\vec{y}$ und den Vektor $\vec{x}$. Wir wollen den Vektor $\vec{x}_y$ bestimmen, der uns den Lotfußpunkt von $\vec{x}$ auf g angibt.

Dieser muss folgende Bedingungen erfüllen:

- 1) Er muss auf dem von $\vec{y}$ erzeugten Unterraum liegen, also von der Form $\vec{x}_y = \lambda \cdot \vec{y}$ sein
- 2) Der Vektor $\vec{x} - \vec{y}$ muss senkrecht auf $\vec{y}$ liegen, also: $\langle \vec{x} - \vec{x}_y, \vec{y} \rangle = 0$

Um daraus λ zu berechnen, muss man sich vorher davon überzeugen, dass das Skalarprodukt linear ist. Dies wird später in Kapitel 2.10 im allgemeinen Fall gezeigt.

Somit erhalten wir

$$0 = \langle \vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle - \lambda \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle,$$

also:

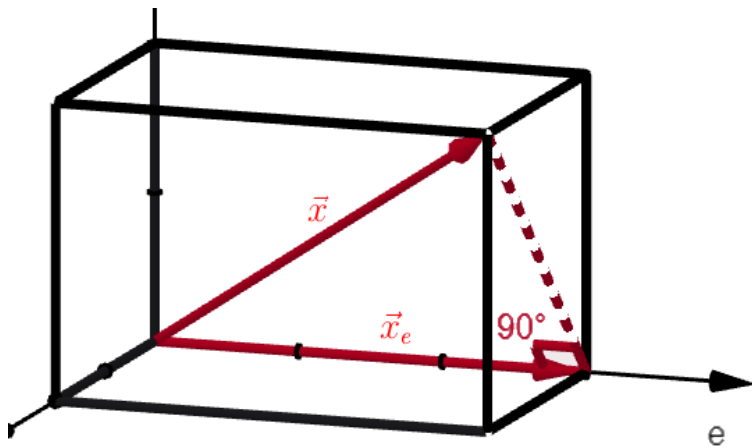
$$\lambda = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle},$$

und damit:

$$\vec{x}_y = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \cdot \vec{y}.$$

Sei h eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$, die durch den Basisvektor $\vec{e}$ gegeben ist. Wir betrachten dann erneut ein rechtwinkliges Dreieck mit $\vec{x}_e$ als Ankathete des Winkels γ und der Hypotenuse $\vec{x}$. Genau wie im $\mathbb{R}^2$ erhalten wir dann:

$$\vec{x}_e = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle}{\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle} \cdot \vec{e}.$$



Aufgabe 7 Berechnet jeweils die Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{x}$ auf die durch ihren Richtungsvektor $\vec{e}$ gegebene Gerade. Gebt den Projektionsvektor als Vielfaches des Richtungsvektors an.

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wir haben uns bereits verdeutlicht, dass die Orthogonalprojektion von $\vec{x}$ auf einen Unterraum U dem kürzesten Weg von $\vec{x}$ zum Unterraum entspricht. Um dessen Länge zu berechnen, benutzen wir wie gewohnt die Formel für den Abstand von $\vec{x}$ und $\vec{x}_U$: $\|\vec{x} - \vec{x}_U\|$.

Da $\vec{x}_U$ der Vektor in U ist, der am nächsten an $\vec{x}$ dran ist, ist $\vec{x}_U$ die beste Näherung von $\vec{x}$ in U .

2.9.3 Orthogonale Projektion auf zweidimensionale Unterräume

Orthogonalbasen

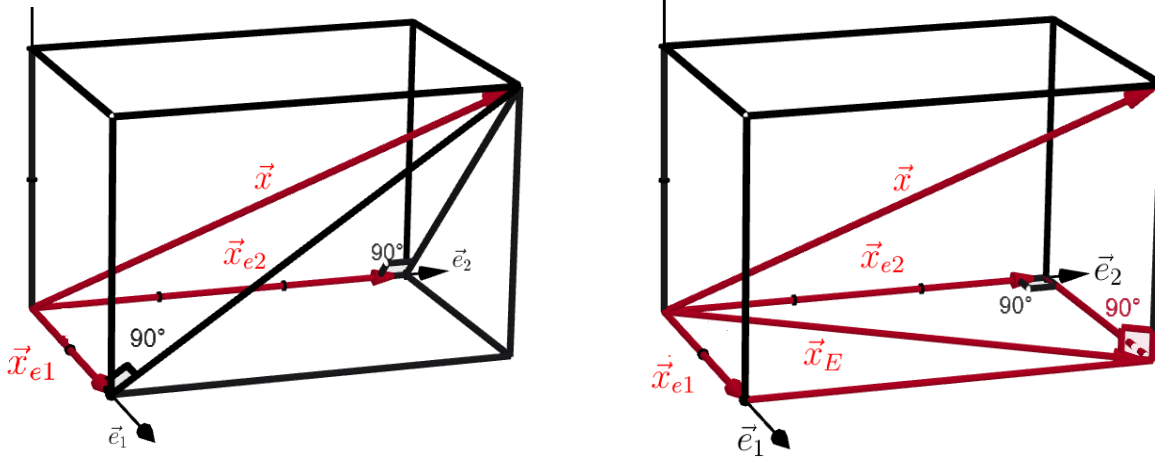
Eine Orthogonalbasis eines Vektorraums ist eine Basis, bei der alle Basisvektoren zueinander orthogonal sind.

Wir betrachten eine Ursprungsebene E mit der Orthogonalbasis $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und einen Vektor $\vec{x}$.

Um $\vec{x}_E$ zu berechnen, können wir das Problem in zwei Projektionen auf die jeweiligen Basisvektoren zerlegen. Aus dem letzten Unterkapitel wissen wir bereits, wie das geht.

Es gilt also $\vec{x}_{e_1} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \cdot \vec{e}_1$ und $\vec{x}_{e_2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \cdot \vec{e}_2$ und damit

$$\vec{x}_E = \vec{x}_{e_1} + \vec{x}_{e_2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \cdot \vec{e}_1 + \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \cdot \vec{e}_2$$



Achtung! Die Zerlegung in die Projektionen auf die einzelnen Basisvektoren funktioniert hier nur, da $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ orthogonal zueinander sind!

Wenn wir mit nicht-orthogonalen Basisvektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ rechnen, ergibt sich aus einem Vektor $\vec{x}$ zusammen mit den Basisvektoren kein Quader, sondern ein Prisma mit einem Parallelogramm als Grundfläche. Das hat zur Folge, dass die Orthogonalprojektionen auf die Basisvektoren nicht mehr mit den einzelnen Koordinaten der Projektion auf die Ebene übereinstimmen.

Beispiel:

Wir betrachten die Ursprungsebene E mit der Orthogonalbasis $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

und den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Es gilt $\vec{x}_{e_1} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle}{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_1$ und $\vec{x}_{e_2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e}_2 \rangle}{\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle} \cdot \vec{e}_2 = \frac{2}{3} \cdot \vec{e}_2$ und damit

$$\vec{x}_E = \frac{1}{2} \cdot \vec{e}_1 + \frac{2}{3} \cdot \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{x}_E$ beschreibt also den Punkt in der Ebene E , der den kleinsten Abstand zu $\vec{x}$ hat. Dieser beträgt

$$\|\vec{x} - \vec{x}_E\| = \left\| \begin{pmatrix} 1-1 \\ 2-2 \\ 2-0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2} = 2$$

Wenn wir jetzt stattdessen als Basis der Ebene E die nicht-orthogonalen Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ wählen, sieht die Lage nicht mehr so einfach aus:

Wir projizieren zunächst jeweils auf $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$.

$$\vec{x}_{b_1} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{b}_1 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \cdot \vec{b}_1 = \frac{4}{5} \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_{b_2} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_2, \vec{b}_2 \rangle} \cdot \vec{b}_2 = \frac{7}{10} \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 2,1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Jedoch beschreibt $\vec{x}_{E'} = \begin{pmatrix} 1,6 \\ 0,8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,7 \\ 2,1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 2,9 \\ 0 \end{pmatrix}$ nicht den Punkt, der den kürzesten Abstand zu $\vec{x}$ hat. Es gilt

$$\|\vec{x} - \vec{x}_{E'}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 - 2,3 \\ 2 - 2,9 \\ 2 - 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1,3)^2 + (-0,9)^2 + 2^2} = \sqrt{6,5} \approx 2,55$$

und somit:

$$\|\vec{x} - \vec{x}_{E'}\| > \|\vec{x} - \vec{x}_E\|.$$

Die wichtigsten Grundlagen, auf die wir die Orthogonalprojektion aufgebaut haben, fallen also weg, sobald ein Unterraum nicht mehr durch eine Orthogonalbasis gegeben ist.

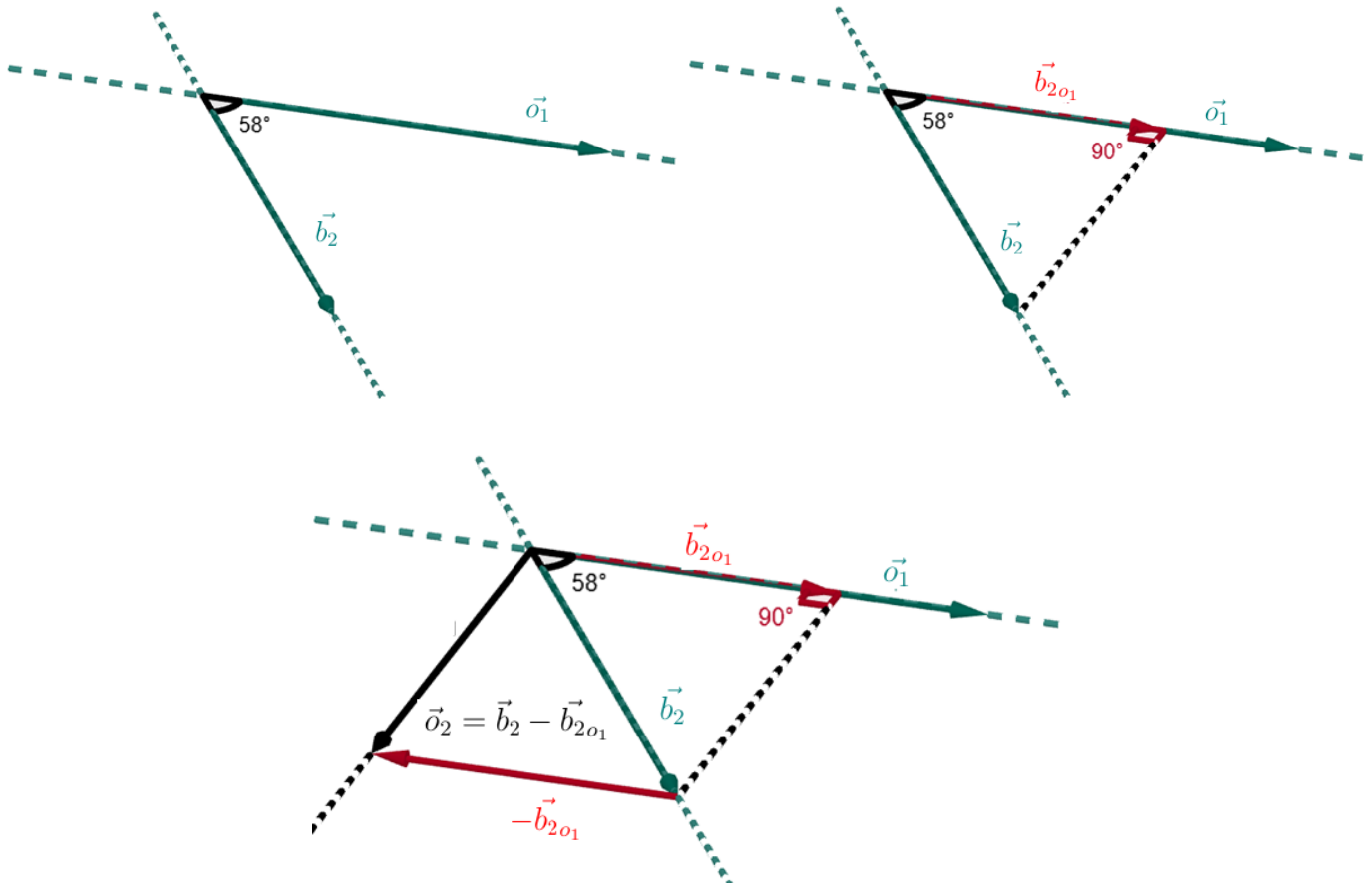
Deshalb wollen wir ausschließlich auf Unterräume projizieren, zu denen wir eine Orthogonalbasis kennen. Es wird jedoch, wie wir im folgenden Kapitel schnell merken werden, oft passieren, dass ein Sachzusammenhang uns zunächst eine nicht-orthogonale Basis liefert, die wir dann zunächst orthogonalisieren müssen. Wie das geht, erfahren wir im nächsten Abschnitt.

2.9.4 Gram-Schmidt-Verfahren

Mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens können wir aus einer nicht-orthogonalen Basis $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ eine Orthogonalbasis $\vec{o}_1, \vec{o}_2$ finden. Dafür legen wir zunächst $\vec{o}_1 = \vec{b}_1$ fest und wählen dann $\vec{o}_2$ orthogonal zu $\vec{o}_1$. Dafür berechnen wir zunächst die Orthogonalprojektion von $\vec{b}_2$ auf $\vec{o}_1$:

$$\vec{b}_{2o_1} = \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1.$$

Wenn wir $\vec{b}_{2o_1}$ dann von $\vec{b}_2$ abziehen, erhalten wir einen Vektor $\vec{o}_2$, sodass dieser orthogonal zu $\vec{o}_1$ ist.



Gram-Schmidt Verfahren: Orthogonalisieren von zwei Vektoren

gegeben: Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$

gesucht: Orthogonalbasis $(\vec{o}_1, \vec{o}_2)$, die die selbe Ebene erzeugt

$$\vec{o}_1 = \vec{b}_1$$

$$\vec{o}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1$$

Wir zeigen, dass $\vec{o}_1$ und $\vec{o}_2$ orthogonal sind:

$$\begin{aligned}\langle \vec{o}_1, \vec{o}_2 \rangle &= \left\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 - \frac{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \cdot \vec{b}_1 \right\rangle \\ &= \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle - \frac{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle} \cdot \langle \vec{b}_1, \vec{b}_1 \rangle \\ &= \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle - \langle \vec{b}_1, \vec{b}_2 \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 8 Prüft jeweils, ob die Basisvektoren der Ebenen mit Basisvektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ orthogonal zueinander sind. Wenn dies nicht der Fall ist, wende das Gram-Schmidt Verfahren an. Berechne jeweils die Orthogonalprojektion des Vektors $\vec{v}$ auf die Ebenen und gebt den Projektionsvektor als Linearkombination der Vektoren der Orthogonalbasis an.

$$\text{a) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Im $\mathbb{R}^3$ sind der Punkt $P(3,2,6)$ und die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

- c) Bestimmt den Punkt P_g auf der Geraden g mit Basisvektor $\vec{v}$, der den geringsten Abstand vom Punkt P hat und berechnet diesen Abstand.
- d) Bestimmt den Punkt P_E in der Ebene E mit Basisvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$, der den geringsten Abstand vom Punkt P hat und berechnet diesen Abstand.
- e) Beschreibt euer Vorgehen und begründet, ob es einen Zusammenhang zwischen c) und d) gibt.

2.10 Vektoren des $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$

Alles, was wir bisher über den zwei- und dreidimensionalen Raum der reellen Zahlen gelernt haben, lässt sich auch auf höhere Dimensionen übertragen. Uns fehlt für diese Räume jede geometrische Vorstellung, dennoch können wir auf die gleiche Art und Weise in ihnen rechnen.

Die Vektoren bestehen entsprechend aus n Komponenten $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Die Vektoraddition und die skalare Multiplikation mit einer reellen Zahl λ im definieren wir im $\mathbb{R}^n$ analog zum $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot a_n \end{pmatrix}.$$

Auch die **Norm** definieren wir analog zum $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$:

$$\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Die Formel, die wir zuvor für den $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ hergeleitet haben, nehmen wir jetzt als Definition für das **Skalarprodukt**:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Während wir zuvor das Skalarprodukt als den halben Pythagorasdefekt definiert haben, können wir nun über das Skalarprodukt den **Satz des Pythagoras** für eine beliebig hohe Dimension n formulieren, obwohl uns hierfür natürlich jegliche Vorstellung für Orthogonalität fehlt!

Im $\mathbb{R}^n$ definieren wir: $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind **orthogonal** zueinander, wenn

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0.$$

Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal zueinander, so gilt:

$$\|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a} + \vec{b}\|^2.$$

Denn man kann sich leicht davon überzeugen (Übungsaufgabe), dass das Skalarprodukt mit der obigen Definition im $\mathbb{R}^n$ symmetrisch und linear in beiden Einträgen ist:

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle &= \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle, \\ \langle \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \vec{c} \rangle &= \lambda \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle + \mu \langle \vec{b}, \vec{c} \rangle. \end{aligned}$$

Daher gilt:

$$\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \langle \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle + \underbrace{2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{=0} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2.$$

Auch das Gram-Schmidt Verfahren können wir analog auf höhere Dimensionen übertragen:

Gram-Schmidt Verfahren

gegeben: Basis $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$

gesucht: Orthogonalbasis $(\vec{o}_1, \vec{o}_2, \dots, \vec{o}_n)$, die denselben Raum erzeugt

Berechnung von $\vec{o}_1$ bis $\vec{o}_n$:

$$\vec{o}_1 = \vec{b}_1$$

$$\vec{o}_2 = \vec{b}_2 - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{b}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1$$

$$\vec{o}_3 = \vec{b}_3 - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{b}_3 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 - \frac{\langle \vec{o}_2, \vec{b}_3 \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \cdot \vec{o}_2$$

...

$$\vec{o}_n = \vec{b}_n - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{b}_n \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 - \frac{\langle \vec{o}_2, \vec{b}_n \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \cdot \vec{o}_2 - \dots - \frac{\langle \vec{o}_{n-1}, \vec{b}_n \rangle}{\langle \vec{o}_{n-1}, \vec{o}_{n-1} \rangle} \cdot \vec{o}_{n-1}$$

Auch im $\mathbb{R}^n$ ist dann

$$\vec{x}_U = \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 + \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \cdot \vec{o}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_n \rangle}{\langle \vec{o}_n, \vec{o}_n \rangle} \cdot \vec{o}_n$$

die beste Approximation von $\vec{x}$ auf U , wobei U der von $\vec{o}_1$ bis $\vec{o}_n$ aufgespannte Unterraum ist.

Aufgabe 9

a) Berechnet: i) $\left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ 13 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle$, ii) $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3,5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -0,2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

b) Berechnet die „Länge“, also die Norm, von $\begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -0,2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Zeigt, dass die drei folgenden Vektoren, die einen dreidimensionalen Unterraum U des $\mathbb{R}^4$ aufspannen, keine Orthogonalbasis von U sind:

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ -5 \\ 2 \\ 22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

d) Orthogonalisiert die Basis aus c) und berechnet die beste Näherung des

$$\text{Vektors } \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ in } U.$$

Das Wichtigste aus Kapitel 2

- Die Länge eines Vektors heißt **Norm** und wir berechnen sie mit der Formel

$$\left\| \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}$$

- Der **Abstand** zwischen zwei Vektoren beträgt $\|\vec{a} - \vec{b}\|$.
- Das **Skalarprodukt** berechnen wir mit der Formel

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n.$$

- Es gilt: $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \|\vec{a}\|^2$ oder, anders geschrieben: $\|\vec{a}\| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle}$.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nennt man **orthogonal** zueinander, wenn $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$.
- Die **Orthogonalprojektion** $\vec{x}_U$ eines Vektors $\vec{x}$ auf einen n -dimensionalen Unterraum U ist die beste Approximation auf U und wird mit der Formel

$$\vec{x}_U = \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 + \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \cdot \vec{o}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{x}, \vec{o}_n \rangle}{\langle \vec{o}_n, \vec{o}_n \rangle} \cdot \vec{o}_n$$

berechnet, sofern $\vec{o}_1, \dots, \vec{o}_n$ eine Orthogonalbasis bilden. Dies haben wir für den Fall $n = 2$ verdeutlicht.

- Eine **Orthogonalbasis** kann man mit dem **Gram-Schmidt Verfahren** berechnen.

3 Anwendungen im $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$

Wir wollen nun endlich in die ersten Anwendungsbereiche unseres Themas einsteigen und damit in die Approximation durch die Entwicklung über Orthogonalbasen.

Approximation bedeutet zunächst einfach, dass Objekte, zum Beispiel Datensätze oder Funktionen, nicht im Original abgespeichert werden, sondern in einer Version, die möglichst nahe am Original dran bleibt, jedoch weniger komplex ist.

Das ist in vielen Bereichen sehr wichtig. Wenn Daten und Signale digital verarbeitet werden, muss oft eine Entscheidung darüber getroffen werden, wie genau die Daten abgespeichert werden sollen. Oftmals sind Teile der Information gar nicht so wichtig und können ohne großen Informationsverlust vernachlässigt werden. Ziel ist es stets, dabei möglichst nahe am Original zu bleiben, also die beste Näherung zu finden.

Wir wissen bereits, dass die beste Näherung in Vektorräumen die Orthogonalprojektion ist. Wenn wir also einem Sachverhalt einen Vektorraum „überstülpen“, also Daten und Informationen als Vektoren auffassen, können wir diese per Formel approximieren. Dabei muss der Unterraum, auf den projiziert wird, und seine Basis so gewählt werden, dass die wichtigen Informationen erhalten bleiben, und weniger wichtige Details vernachlässigt werden. Die Norm ist dann das Maß für die Approximationsqualität: sie gibt an, wie weit wir uns durch die Approximation vom Originalobjekt entfernt haben.

3.1 Dimensionsreduktion bei Datenmengen

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Ergebnissen des Zehnkampfes der Olympischen Spiele 2024 auseinander setzen. Beim Zehnkampf treten die Athleten an zwei aufeinander folgenden Tagen in insgesamt zehn Disziplinen gegeneinander an. Für jede Disziplin wird eine bestimmte Punktzahl vergeben. Die Punkte der einzelnen Disziplinen werden dann zu einem Gesamtergebnis addiert. Die Disziplinen sind, in der Reihenfolge, in der sie an den Wettkampftagen durchgeführt werden:

100-Meter-Lauf, Weitsprung, Kugelstoßen, Hochsprung, 400-Meter-Lauf, 110-Meter-Hürdenlauf, Diskuswurf, Stabhochsprung, Speerwurf, 1500-Meter-Lauf.

Die zehn Punktzahlen eines jeden Olympioniken sind als Vektor des $\mathbb{R}^{10}$ gegeben. Wir wollen uns jedoch nicht jeden einzelnen Wert anschauen, sondern analysieren, wie gut ein einzelner Athlet jeweils in den Lauf-, Sprung- und Wurfdisziplinen abgeschnitten hat.

Die Idee ist, dass wir einen Lauf-, einen Sprung- und einen Wurfvektor wählen, die jeweils prototypische Werte für einen sehr guten Läufer, Springer und Werfer darstellen. Wir wählen dafür die Punktzahl des Erstplatzierten in der jeweiligen Disziplin. Natürlich hat man hier einen gewissen Spielraum, auch andere Werte führen zu einem aussagekräftigen Ergebnis.

Die folgende Tabelle zeigt die die Ergebnisse der deutschen Leichtathleten Leo Neugebauer, Niklas Kaul und Till Steinforth bei den Olympischen Sommerspielen 2024 in Paris.

	1. Platz	Leo Neugebauer	Niklas Kaul	Till Steinforth
100 m Lauf	1035	935	786	970
Weitsprung	1068	1056	835	962
Kugelstoßen	891	885	743	726
Hochsprung	963	850	822	767
400 m Lauf	1000	924	855	911
110 m Hürdenlauf	1024	910	907	927
Diskuswurf	952	940	793	717
Stabhochsprung	1004	919	849	819
Speerwurf	1009	687	1009	725
1500 m Lauf	846	651	846	646

$\vec{b}_l$ ist der Lauf-Basisvektor, $\vec{b}_s$ der Sprung-Basisvektor und $\vec{b}_w$ der Wurf-Basisvektor des Unterraums, auf den wir projizieren wollen.

$$\vec{b}_l = \begin{pmatrix} 1035 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1024 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 846 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1068 \\ 0 \\ 963 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1004 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 891 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 952 \\ 0 \\ 1009 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{l} = \begin{pmatrix} 935 \\ 1056 \\ 885 \\ 850 \\ 924 \\ 910 \\ 940 \\ 919 \\ 687 \\ 651 \end{pmatrix}.$$

Wir haben die Basisvektoren so gewählt, dass sofort eine Orthogonalbasis vorliegt. Wir projizieren den Vektor $\vec{l}$ der Punktzahlen von Leo Neugebauer auf den dreidimensionalen Unterraum und erhalten somit einen Lauf,- Sprung- und Wurfkoeffizienten.

$$\frac{\langle \vec{l}, \vec{b}_l \rangle}{\langle \vec{b}_l, \vec{b}_l \rangle} \cdot \vec{b}_l + \frac{\langle \vec{l}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \cdot \vec{b}_s + \frac{\langle \vec{l}, \vec{b}_w \rangle}{\langle \vec{b}_w, \vec{b}_w \rangle} \cdot \vec{b}_w \approx 0,67 \cdot \begin{pmatrix} 1846 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1024 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 846 \end{pmatrix} + 0,93 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1068 \\ 0 \\ 963 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1004 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,87 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 891 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 952 \\ 0 \\ 1009 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dadurch sehen wir, dass Leo Neugebauer besonders gut in den Sprungdisziplinen abgeschnitten hat und bei den Laufdisziplinen insgesamt eher schlechtere Ergebnisse hatte. Schlecht ist hier natürlich

sehr relativ zu verstehen, Neugebauer hat die Silbermedaille im Zehnkampf gewonnen.

Darüber hinaus können wir mit dieser Methode übersichtlich sehr viele Athleten und ihre jeweiligen Stärken und Schwächen erfassen und müssen jeweils statt zehn Werten immer nur drei speichern.

Aufgabe 10

Berechnet die Lauf-, Sprung- und Wurfkoeffizienten für Niklas Kaul und Till Steinforth.

3.2 Anpassung von Funktionen an Messreihen

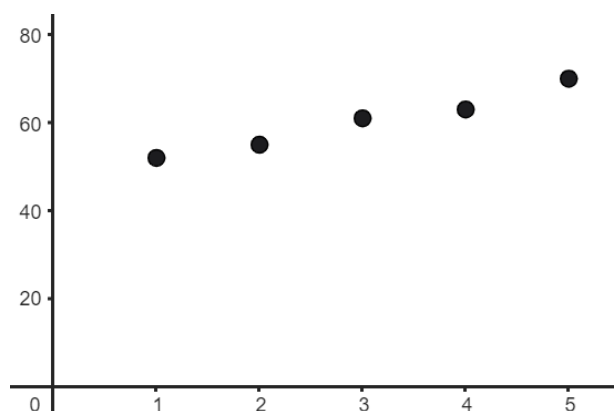
Messreihen, die zum Beispiel durch naturwissenschaftliche Experimente oder Datenerhebungen entstanden sind, lassen sich oft näherungsweise durch ganzrationale Funktionen eines bestimmten Grades beschreiben.

3.2.1 Die beste lineare Approximation

In diesem Unterkapitel wollen wir eine Reihe von Messpunkten durch eine Gerade approximieren. Eine solche Gerade nennt man auch Ausgleichsgerade.

Wir betrachten folgendes Beispiel: Eine Studie hat den Zusammenhang von der verbrachten Lernzeit und den in einem Test erreichten Punkten erforscht.

Lernzeit in Stunden	1	2	3	4	5
Im Test erreichte Punkte	52	55	61	63	70



Wir haben also die Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, ..., $P_5(x_5, y_5)$ gegeben und suchen nun die lineare Funktion $f(x) = m \cdot x + n$, so dass die Abstände der Punkte und dem Funktionsgraphen insgesamt minimal sind.

Um diesen Abstand zu messen, brauchen wir ein geeignetes Maß:

$$d(\vec{y}, f) = (y_1 - f(x_1))^2 + (y_2 - f(x_2))^2 + \dots + (y_5 - f(x_5))^2 = \left\| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ f(x_4) \\ f(x_5) \end{pmatrix} \right\|^2$$

$d(\vec{y}, f)$ ist das Maß, welches die Abstandsquadrate der einzelnen Punkte an den vorgegebenen x -Werten summiert. Wählen wir $f(x)$ so, dass diese Summe minimal wird, erhalten wir mit $f(x)$ die beste lineare Näherung.

Bemerkung: Warum nehmen wir hier die Quadrate der Abweichung? Wäre es nicht einfacher, die Beträge $|y_1 - f(x_1)| + |y_2 - f(x_2)| + \dots$ zu nehmen?

Der Grund ist der Folgende: Die durch $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ definierte Norm, die wir die ganze Zeit verwenden, hängt über $\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle$ mit dem Standard-Skalarprodukt zusammen und nur so können wir unser Verfahren der Orthogonalprojektion überhaupt anwenden. Würden wir den Betrag der Abstände betrachten, gäbe es kein damit verbundenes Skalarprodukt und wir könnten nicht so wie bisher vorgehen.

Wir fassen alle y -Werte als Vektor des $\mathbb{R}^5$ auf:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ 55 \\ 61 \\ 63 \\ 70 \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel ist es eine Funktion $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x$ als beste lineare Approximation an unsere Datenpunkte zu finden. Diese Funktion nennen wir **Ausgleichsgerade**. Diese Funktion besteht aus einem konstanten Term a_0 und einem linearen Term $a_1 \cdot x$, wobei wir für x nacheinander die x -Werte von 1 bis 5 einsetzen. Daher ist es naheliegend den 2-dimensionalen Unterraum U des $\mathbb{R}^5$ zu betrachten, der von den folgenden Vektoren aufgespannt wird:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \\ x_4^1 \\ x_5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Wir wollen $\vec{y}$ orthogonal auf U projizieren, so dass

$$\vec{y}_U = a_0 \cdot \vec{x}_0 + a_1 \cdot \vec{x}_1.$$

Dann ist $\vec{y}_U$ die beste Approximation unserer Messwerte auf U .

Wichtig: Wir haben jetzt jeweils die x_i und y_i aus ihrem ursprünglichen Kontext abstrahiert. Die Werte haben eigentlich verschiedene Einheiten, hier zum Beispiel Stunden und Anzahl der Punkte. Deshalb dürfen wir die beiden Vektoren nicht ohne weiteres miteinander verrechnen, was wir ja innerhalb eines Vektorraumes tun. Diese Schwierigkeit müssen wir uns bewusst machen und müssen während unserer gesamten Rechnung wachsam bleiben, damit wir nicht plötzlich doch z.B. Stunden und Anzahl der Punkte addieren, was offensichtlich wenig Sinn ergeben würde. Dazu kommt es glücklicherweise nicht, da a_0 und a_1 nicht bloß Zahlen sind, sondern auch eine „Einheit“ haben, die zwischen $\vec{y}$ und den $\vec{x}_i$ vermitteln. Mathematisch rechnen wir also abstrakt mit Vektoren im $\mathbb{R}^5$, können aber trotzdem unser Ergebnis wieder als reale Messwerte interpretieren.

Orthogonalprojektion und Rücktransformation

In den allermeisten Fällen, so auch hier, ist die Basis $\vec{x}_0, \vec{x}_1$ keine Orthogonalbasis und man muss zunächst mit dem Gram-Schmidt Verfahren orthogonalisieren.

Wir erhalten also eine Orthogonalbasis $\vec{o}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{o}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und berechnen:

$$\vec{y}_U = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_0 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{o}_0 + \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 = 60,2 \cdot \vec{o}_0 + 4,4 \cdot \vec{o}_1.$$

Achtung! Die Koeffizienten

$$a'_0 = 60,2 \quad \text{und} \quad a'_1 = 4,4,$$

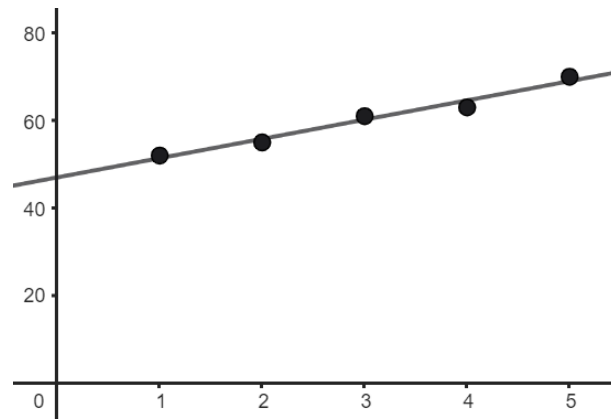
die wir durch die Orthogonalprojektion erhalten, sind noch nicht die Koeffizienten a_0, a_1 der Funktion f . Wir müssen $\vec{y}_U$ erst als Linearkombination der ursprünglichen Basisvektoren $\vec{x}_0, \vec{x}_1$ darstellen. Für die Rücktransformation setzen wir die Terme des Gram-Schmidt Verfahrens stückweise für alle $\vec{o}_i$ ein.

$$\begin{aligned} \vec{o}_0 &= \vec{x}_0 \\ \vec{o}_1 &= \vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{o}_0 = \vec{x}_1 - 3 \cdot \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Bedenkt an dieser Stelle, dass ihr bereits den Quotienten berechnet habt, als ihr die Basis orthogonalisiert habt! Ihr müsst nur noch die Klammer ausmultiplizieren und die Terme zusammenfassen.

$$\begin{aligned} \vec{y}_U &= 60,2 \cdot \vec{o}_0 + 4,4 \cdot \vec{o}_1 \\ &= 60,2 \cdot \vec{x}_0 + 4,4 \cdot (\vec{x}_1 - 3 \cdot \vec{x}_0) \\ &= 60,2 \cdot \vec{x}_0 + 4,4 \cdot \vec{x}_1 - 4,4 \cdot 3 \cdot \vec{x}_0 \\ &= 47 \cdot \vec{x}_0 + 4,4 \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Die lineare Funktion $f(x) = 47 + 4,4 \cdot x$ ist also die beste lineare Approximation der gegebenen Punkte.



Alternativ können wir $\vec{y} = \begin{pmatrix} 52 \\ 55 \\ 61 \\ 63 \\ 70 \end{pmatrix}$ als Vektor im Vektorraum der stückweise konstanten Funktionen

auf dem Intervall $[1,6[$ betrachten und dann auf einen Unterraum in diesem Funktionenraum orthogonal projizieren. Mehr dazu findet ihr im Anhang.

Aufgabe 11

Ein Topf mit Wasser wird auf einer Herdplatte mit konstanter Heizleistung erhitzt. Alle vier Minuten wird die Temperatur gemessen.

vergangene Zeit in Minuten	0	4	8	12	16
gemessene Temperatur in °C	20	38	65	79	95

Bestimmt die beste lineare Approximation der gegebenen Messwerte.

4 Der Haar-Algorithmus

In diesem Kapitel wollen wir eine alternative Basis für den $\mathbb{R}^n$ betrachten, die bezüglich einer sinnvollen Approximation viele Vorteile hat. Ziel ist es, uns mit dem Haar-Algorithmus vertraut zu machen, der unter anderem im JPEG- und MP3-Format verwendet wird. Wir werden feststellen, dass er der Entwicklung über einer bestimmten Orthogonalbasis entspricht.

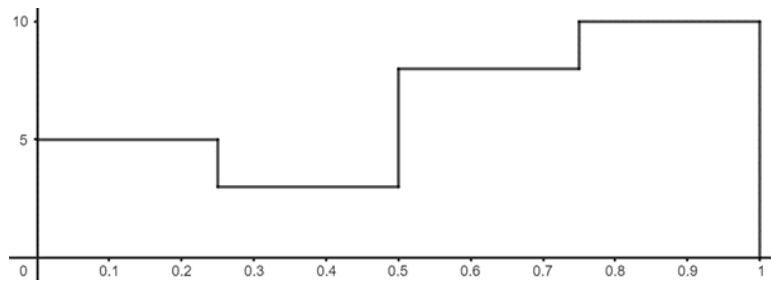
Dafür betrachten wir in diesem Kapitel alle Spaltenvektoren als Wertelisten für Treppenfunktionen auf dem Einheitsintervall.

4.1 Spaltenvektoren und stückweise konstante Funktionen

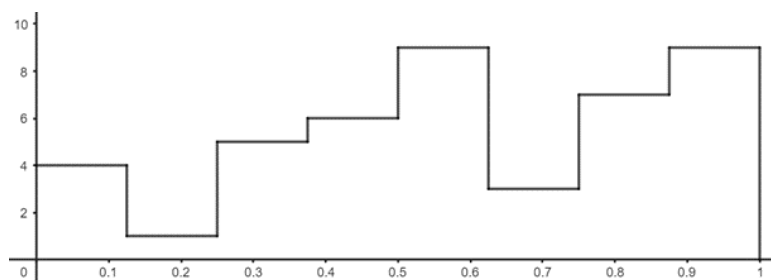
Wir betrachten von nun an nur noch Vektoren mit 2^n Einträgen. Desweiteren unterteilen wir das Einheitsintervall $[0,1[$ in 2^n gleich breite Abschnitte. Ein Vektor beschreibt dann mit seinen Einträgen eine stückweise konstante Funktion, die auf dem Intervall $[0,1[$ entsprechend die Werte auf den Abschnitten annimmt und sonst überall Null ist.

Beispiele:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$$



$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$



Alle digitalen Signale sind letztendlich solche diskreten, stückweise konstanten Funktionen. Um mit diesen Signalen bestmöglich arbeiten zu können, ist es in vielen Bereichen vorteilhaft, die Signale zu komprimieren, also zu verkleinern. Die kanonische Basis bietet uns in dieser Hinsicht jedoch kaum Vorteile.

Wir betrachten den Beispielvektor $\vec{v}$. Bezüglich der kanonischen Basis schreiben wir

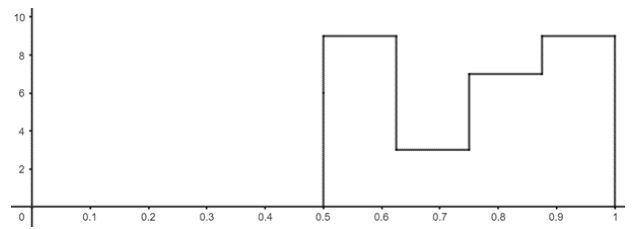
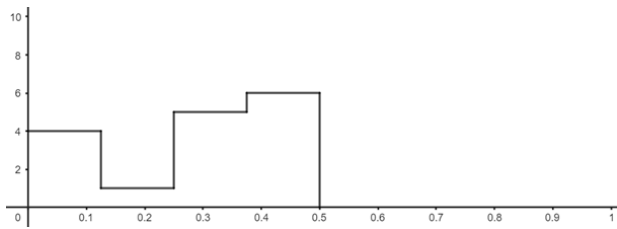
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir $\vec{v}$ nun zum Beispiel als vierdimensionales Signal speichern wollen, sind unsere Möglichkeiten sehr begrenzt. Als mögliche vierdimensionale Unterräume sind zum Beispiel U_1 mit der Basis B_1 oder U_2 mit der Basis B_2 naheliegend.

$$B_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Projektion auf U_1 bedeutet, dass wir die Entwicklung nach der Hälfte abbrechen, während wir mit U_2 nur die zweite Hälfte nehmen.



$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

In den allermeisten Fällen ist diese Art von Kompression nicht sehr hilfreich. Auch wenn wir beispielsweise jeden zweiten Wert speichern, erfassen wir zwar Daten über das gesamte Signal verteilt, jedoch nehmen wir auch hier einen sehr großen Datenverlust in Kauf. Ein Teil des Signals bleibt vollständig erhalten, während der andere komplett vernachlässigt wird. Besser wäre es, wenn wir eine Möglichkeit hätten, das gesamte Signal gröber oder feiner abzuspeichern.

Ein naheliegender Ansatz wäre es, den Mittelwert aller Werte eines Signals abzuspeichern. Das ist zwar zunächst sehr ungenau, aber immerhin erfassen wir nun das gesamte Signal. Für $\vec{v}$ würde das bedeuten, dass wir in jeder Komponente den Mittelwert speichern.

$$\frac{4 + 1 + 5 + 6 + 9 + 3 + 7 + 9}{8} = 5,5$$

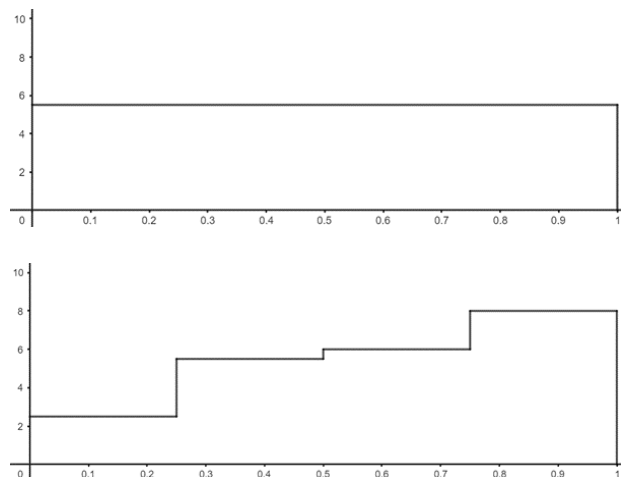
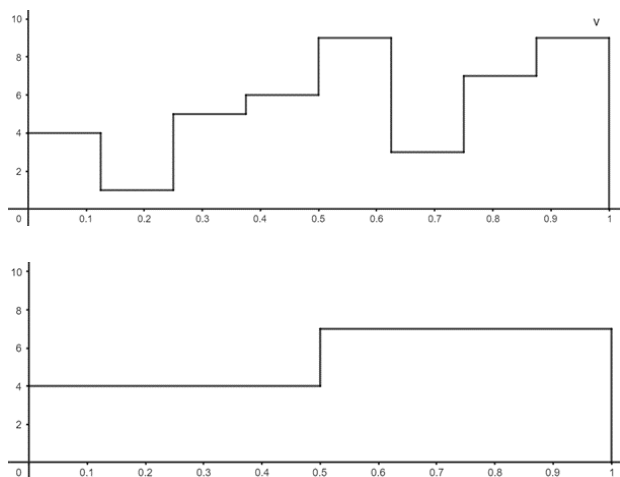
Da wir mit dieser Methode aber einen sehr hohen Informationsverlust hätten, führen wir diesen Gedanken noch etwas weiter. Statt einem einzelnen Mittelwert könnten wir auch zwei, oder sogar vier Mittelwerte berechnen und speichern.

Für ein zweidimensionales Signal würden wir den Mittelwert der ersten Hälfte und den der zweiten Hälfte berechnen:

$$m_1 = \frac{4 + 1 + 5 + 6}{4} = 4 \quad m_2 = \frac{9 + 3 + 7 + 9}{4} = 7$$

Für ein vierdimensionales Signal berechnen wir die Mittelwerte von jeweils zwei aufeinander folgenden Werten.

$$m_1 = \frac{4 + 1}{2} = 2,5 \quad m_2 = \frac{5 + 6}{2} = 5,5 \quad m_3 = \frac{9 + 3}{2} = 6 \quad m_4 = \frac{7 + 9}{2} = 8$$



Wir wollen nun genau dieses Prinzip in einem Vektorraum umsetzen und suchen deshalb eine Basis, die uns genau die Werte einer solchen Mittelwertbildung liefert und die uns später helfen wird, Daten effizient – ohne zu großen Informationsverlust – einzusparen.

Vorüberlegung

Wir können uns anstelle von zwei Zahlen a und b auch ihren Mittelwert m und ihre Differenz d merken.

$$m = \frac{a+b}{2} \quad d = a - b$$

Damit können wir die ursprünglichen Zahlen wie folgt aus ihrem Mittelwert und ihrer Differenz berechnen können:

$$a = m + \frac{1}{2} \cdot d \quad b = m - \frac{1}{2} \cdot d$$

Wir erweitern diesen Gedanken auf vier Zahlen a_1, a_2, b_1, b_2 .

Seien

$$m_a = \frac{a_1 + a_2}{2} \quad d_a = a_1 - a_2 \quad m_b = \frac{b_1 + b_2}{2} \quad d_b = b_1 - b_2$$

Nun nehmen m_a und m_b die Rollen ein, die vorher a und b eingenommen haben. Der Mittelwert der einzelnen Mittelwerte m_a und m_b entspricht dann dem gesamten Mittelwert m .

$$m = \frac{m_a + m_b}{2} = \frac{a_1 + a_2 + b_1 + b_2}{4} \quad d = m_a - m_b$$

Zusammen mit der Differenz von m_a und m_b können wir nun den Mittelwert der ersten und den der zweiten Hälfte aus ihrer Differenz und dem gesamten Mittelwert berechnen:

$$m_a = m + \frac{1}{2} \cdot d \quad m_b = m - \frac{1}{2} \cdot d$$

4.2 Die Haar-Basis

Mit der Haar-Basis können wir genau dieses Prinzip in 2^n -dimensionalen Vektorräumen anwenden. Sie ist auf den ungarischen Mathematiker Alfred Haar (1888-1933) zurückzuführen und liefert bei der Approximation und in der Signalverarbeitung einen entscheidenden Vorteil gegenüber der kanonischen Basis.

Die Haar-Basis

Wir betrachten ausschließlich Vektorräume, deren Dimension eine Zweierpotenz 2^n ist, also z.B. $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^8, \dots$

Die Haar-Basis $(h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)$ des $\mathbb{R}^8$ lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die richtige Reihenfolge der Vektoren der Haarbasis ist insbesondere für die Aufgaben sehr wichtig.

Dass es sich hierbei um eine Orthogonalbasis handelt, lässt sich durch einfaches Nachrechnen überprüfen.

Die Koeffizienten k_i mit $i \in 1, \dots, 8$ eines Vektors $\vec{v}$ bezüglich der Haar-Basis ergeben sich aus der Formel für die orthogonale Projektion auf die entsprechenden Vektoren:

$$k_i = \frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_i \rangle}{\langle \vec{h}_i, \vec{h}_i \rangle}$$

Wir können nun unseren Beispielvektor $\vec{v}$ aus dem $\mathbb{R}^8$ auf die Haar-Basis des $\mathbb{R}^8$ per Formel projizieren und erhalten

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_1 \rangle}{\langle \vec{h}_1, \vec{h}_1 \rangle} \cdot \vec{h}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_2 \rangle}{\langle \vec{h}_2, \vec{h}_2 \rangle} \cdot \vec{h}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_8 \rangle}{\langle \vec{h}_8, \vec{h}_8 \rangle} \cdot \vec{h}_8$$

$$= 5,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Warum ist diese Entwicklung nun der über die kanonische Basis vorzuziehen? Wir betrachten die Bedeutung der einzelnen Koeffizienten genauer.

Die Projektion auf h_1 entspricht der Mittelwertbildung aller Werte des Signals und liefert uns einen Vektor, der an jeder Komponente den Mittelwert m annimmt.

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_1 \rangle}{\langle \vec{h}_1, \vec{h}_1 \rangle} \cdot \vec{h}_1 = \frac{v_1 \cdot 1 + \dots + v_8 \cdot 1}{8} \cdot \vec{h}_1 = m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{pmatrix}$$

Die Projektion auf $\vec{h}_2$ liefert uns die Differenz d der Mittelwerte m_a, m_b der ersten und zweiten Hälfte des Signals.

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_2 \rangle}{\langle \vec{h}_2, \vec{h}_2 \rangle} = \frac{(v_1 + \dots + v_4) - (v_5 + \dots + v_8)}{8} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{v_1 + \dots + v_4}{4} - \frac{v_5 + \dots + v_8}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot (m_a - m_b) = \frac{1}{2} \cdot d$$

Da $\vec{h}_2$ entsprechend konstruiert ist, addieren wir die Hälfte der Differenz für die erste Hälfte des Signals auf den gesamten Mittelwert drauf und ziehen ihn von der zweiten Hälfte ab, wenn wir die einzelnen Projektionen auf $\vec{h}_1$ und $\vec{h}_2$ zusammen setzen.

In den ersten vier Komponenten steht dann der Mittelwert m_a der ersten Hälfte und in den letzten vier m_b , also der Mittelwert der zweiten Hälfte.

$$m_a = m + \frac{1}{2} \cdot d \quad m_b = m - \frac{1}{2} \cdot d$$

$$\frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_1 \rangle}{\langle \vec{h}_1, \vec{h}_1 \rangle} \cdot \vec{h}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{h}_2 \rangle}{\langle \vec{h}_2, \vec{h}_2 \rangle} \cdot \vec{h}_2 = m \cdot \vec{h}_1 + \frac{1}{2} \cdot d \cdot \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot d \\ \frac{1}{2} \cdot d \\ \frac{1}{2} \cdot d \\ \frac{1}{2} \cdot d \\ -\frac{1}{2} \cdot d \\ -\frac{1}{2} \cdot d \\ -\frac{1}{2} \cdot d \\ -\frac{1}{2} \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m + \frac{1}{2} \cdot d \\ m + \frac{1}{2} \cdot d \\ m + \frac{1}{2} \cdot d \\ m + \frac{1}{2} \cdot d \\ m - \frac{1}{2} \cdot d \\ m - \frac{1}{2} \cdot d \\ m - \frac{1}{2} \cdot d \\ m - \frac{1}{2} \cdot d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_a \\ m_a \\ m_a \\ m_a \\ m_b \\ m_b \\ m_b \\ m_b \end{pmatrix}$$

Eine Projektion auf die ersten vier Vektoren der Haar-Basis liefert uns nach dem gleichen Prinzip vier Mittelwerte, den der ersten beiden Einträge, den des dritten und vierten Eintrags usw.

Das bedeutet, dass wir die Projektion über die Haar-Basis nach einer Zweierpotenz von Schritten abbrechen können. Je weiter wir die Berechnung durchführen, desto genauer wird die Approximation. Projizieren wir auf die gesamte Basis, erhalten wir das vollständige Signal.

Beispiel: Die 1-, 2- und 4-dimensionale Projektion von $\vec{v}$ auf die Haar-Basis

$$\vec{v}_1 = 5,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = 5,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 = 5,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 1,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 6 \\ 6 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12

Zeichnet die zugehörigen Funktionen auf dem Einheitsintervall.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13

a) Zeigt, dass die Vektoren der Haar-Basis des $\mathbb{R}^4$ orthogonal zueinander sind.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b) Zeichnet folgende Signale als Funktionen:

$$\text{i) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ii) Die Näherung von $\vec{v}$ über die ersten beiden Vektoren der oben genannten Haar-Basis. (halber Speicherbedarf)

iii) Eine Näherung von $\vec{v}$ über die ersten beiden Vektoren der kanonischen Basis.

c) Berechnet die Näherung über die ersten vier Vektoren der Haar-Basis des $\mathbb{R}^8$ des Signals aus Aufgabe 12 c).

d) Überlegt euch, wie die Haarbasis für den $\mathbb{R}^{16}$ aussieht.

4.3 Relativer Fehler

Um quantitativ zu erfassen, wie stark eine Approximation vom Originalsignal abweicht, führen wir den relativen Fehler ein.

Relativer Fehler

Der relative Fehler δ einer Approximation $\vec{x}_U$ des Original-Signals $\vec{x}$ ist der Quotient aus Norm der Differenz und der Norm des Original-Vektors:

$$\delta = \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_U\|}{\|\vec{x}\|}$$

Aufgabe 14

Berechnet den relativen Fehler der Näherung aus Aufgabe 13 c).

4.4 Thresholding

Die Haarbasis ermöglicht neben dem Abbrechen der Entwicklung noch eine weitere Möglichkeit der Approximation. Die Koeffizienten der Haar-Darstellung geben – wie wir gesehen haben – an, wie groß die Abstände zwischen zwei Stufen sind. Wenn die Unterschiede von zwei benachbarten Stufen sehr klein sind, können wir die Dimension verringern, indem wir diese Koeffizienten gleich Null setzen. Bei dieser Vorgehensweise kann man einen sogenannten Schwellenwert ϵ festlegen. Alle Koeffizienten, die betragsmäßig kleiner sind als ϵ werden denn vernachlässigt. Diese Form der Approximation wird als Thresholding bezeichnet.

Die Haar-Basis ist jedoch nicht normiert, ihre Vektoren haben eine unterschiedliche Länge. Das führt dazu, dass die Koeffizienten der vorderen Basisvektoren tendenziell größer sein werden als die der hinteren. Damit wir die Koeffizienten miteinander auf die beschriebene Art vergleichen können, müssen wir die Haar-Basis normieren.

Die normierte Haar-Basis

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: Um einen Vektor zu normieren, also auf die Länge 1 zu bringen, multiplizieren wir ihn mit dem Kehrwert seiner Länge.

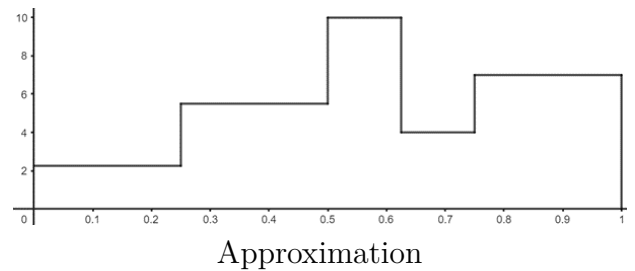
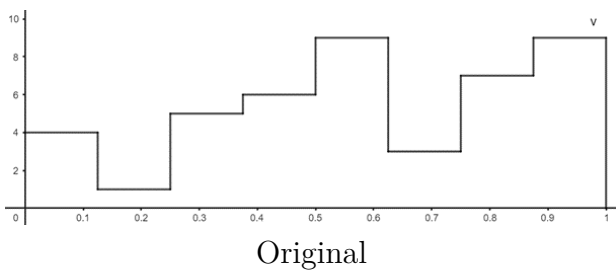
Nun können wir genau wie zuvor auf die normierte Haar-Basis projizieren und anschließend alle betragsmäßig kleinen Koeffizienten weglassen.

Für unser Beispielsignal $\vec{v}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 9 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 15,56 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4,24 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
 + 2,12 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0,71 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4,24 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1,41 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bei einem Schwellenwert von $\epsilon = 2,5$ sieht die Approximation wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 5,5 \\ 5,5 \\ 10 \\ 4 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} = 15,56 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4,24 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4,24 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



4.5 Haar-Algorithmus

Wir wollen uns an dieser Stelle den Haar-Algorithmus anschauen. Er entspricht genau dieser Projektion auf die normierte Haar-Basis, inklusive Thresholding, hat jedoch einen geringeren Rechenaufwand und erleichtert die Rechnung zudem durch seine Übersichtlichkeit.

Die Grundidee ist, dass wir den gesamten Mittelwert aus den einzelnen Teil-Mittelwerten berechnen.

Im ersten Schritt berechnen wir für jeweils zwei benachbarte Werte den Mittelwert und die Differenz. Die Differenzen merken wir uns, für die Mittelwerte berechnen wir erneut paarweise den Mittelwert und die Differenz. Das machen wir solange, bis wir nur noch einen Mittelwert haben. Der Vorteil ist, dass wir so den gesamten Mittelwert aus den Teil-Mittelwerten berechnet haben und dadurch weniger Rechenaufwand hatten. Jedoch entsteht dabei auch ein kleines Problem: Die Norm bleibt nicht erhalten. Das bedeutet, dass die Norm von zwei Zahlen a und b nicht der Norm von ihrem Mittelwert und ihrer Differenz entspricht.

Beispiel: Der Mittelwert von 11 und 5 ist 8, die Differenz 6. Aber: $5^2 + 11^2 = 146 > 100 = 8^2 + 6^2$

Es ist jedoch sehr wichtig, dass die Norm erhalten bleibt, damit wir die Werte miteinander vergleichen können. Wenn wir am durch den Algorithmus transformierten Signal eine kleine Veränderung vornehmen, darf das am Originalsignal auch nur eine kleine Veränderung bedeuten.

Wir führen daher zwei Korrekturfaktoren ein. Die Differenzen multiplizieren wir jeweils mit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und die Mittelwerte mit $\sqrt{2}$. Dann gilt:

$$\left(\frac{a+b}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \left((a-b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2$$

Wir berechnen also für zwei Werte a und b

$$m = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \quad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

Das Berechnen der ursprünglichen Werten a und b nennen wir Rücktransformation. Diese lassen sich aus m und d mit folgender Formel berechnen:

$$a = \frac{m+d}{\sqrt{2}} \quad b = \frac{m-d}{\sqrt{2}}.$$

Der Haar-Algorithmus transformiert im ersten Teil alle Werte in Differenzwerte und einen gesamten Mittelwert. An dieser Stelle wird das Thresholding durchgeführt. Im zweiten Teil des Algorithmus erfolgt stückweise die Rücktransformation.

Auf der Seite nach Aufgabe 15 zeigen die ersten beiden Tabellen den ersten Teil des Haar-Algorithmus einmal allgemein für ein 8-dimensionales Signal und einmal für das Beispielsignal $\vec{v}$. In den unteren beiden Tabellen wird die Rücktransformation für beide Fälle dargestellt.

Der Haar-Algorithmus für ein 8-dimensionales Signal

- 1) Im ersten Schritt berechnen wir für jeweils zwei benachbarte Werte die Differenz und den Mittelwert, multipliziert mit dem entsprechenden Faktor. Die vier Differenzen merken wir uns in den ersten vier Spalten, die Mittelwerte in den letzten Spalten.
- 2) Dann wiederholen wir dieses Vorgehen mit den Mittelwerten (Spalte 5 bis 8), speichern erneut die beiden berechneten Differenzen vorne (Spalte 5 und 6) und die zwei Mittelwerte hinten (Spalte 7 und 8).
- 3) Ein letztes Mal wird die Differenz und der Mittelwert der verbleibenden Mittelwerte berechnet, sodass wir nun sieben Differenzwerte haben und einen Mittelwert.

Das Ergebnis nach diesem dritten Schritt entspricht genau den Koeffizienten der normierten Haarbasis: Vergleicht die vierte Zeile der oberen Tabellen mit der Rechnung auf der nächsten Seite. An dieser Stelle erfolgt das Thresholding: Alle Werte, deren Betrag kleiner als ein bestimmtes ϵ ist, werden auf Null gesetzt. Für unser Beispiel wählen wir $\epsilon = 2,5$. Die jeweils zweiten Tabellen zeigen die sogenannte Rücktransformation. Sie entspricht dem Berechnen der Werte des approximierten Signals, das wir zuvor durch Berechnen der Linearkombination der Koeffizienten und der (normierten) Haar-Basis durchgeführt haben.

- 4) Wir wenden die Formel für die Rücktransformation zunächst auf die hinteren beiden Werte an. Den Wert a speichern wir in Spalte 7, b in Spalte 8, also jeweils da, wo sie auch zuvor standen.
- 5) Anschließend betrachten wir die hinteren vier Werte und wenden die Formel auf die fünfte und siebte, sowie auf die sechste und achte Spalte an. Das wird auf der nächsten Seite deutlicher: Die Formel wird stets auf zwei gleichfarbige Werte angewendet.
- 6) Im letzten Schritt betrachten wir wieder alle acht Werte und berechnen jeweils aus der ersten und fünften, der zweiten und sechsten, ... Spalte mit der Formel für die Rücktransformation die Werte des fertig approximierten Signals.

Das approximierte Signal, das der Algorithmus liefert (vgl. die letzte Zeile der letzten Tabelle) entspricht genau dem Signal, welches wir im vorherigen Kapitel durch das Weglassen der entsprechenden Koeffizienten berechnet haben.

Original	4	1	5	6	9	3	7	9
Approximation	2,5	2,5	5,5	5,5	10	4	7	7

Aufgabe 15

Führt den Haar-Algorithmus mit Schwellenwert ϵ durch.

$$\text{a) } \epsilon = 2,1, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5,3 \\ 6 \\ 4 \\ 3 \\ 1,5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \epsilon = 2,5, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,3 \\ 4 \\ 9 \\ 5 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
$d_1 = \frac{v_1-v_2}{\sqrt{2}}$	$d_2 = \frac{v_3-v_4}{\sqrt{2}}$	$d_3 = \frac{v_5-v_6}{\sqrt{2}}$	$d_4 = \frac{v_7-v_8}{\sqrt{2}}$	$m_1 = \frac{v_1+v_2}{\sqrt{2}}$	$m_2 = \frac{v_3+v_4}{\sqrt{2}}$	$m_3 = \frac{v_5+v_6}{\sqrt{2}}$	$m_4 = \frac{v_7+v_8}{\sqrt{2}}$
d_1	d_2	d_3	d_4	$d_5 = \frac{m_1-m_2}{\sqrt{2}}$	$d_6 = \frac{m_3-m_4}{\sqrt{2}}$	$m_5 = \frac{m_1+m_2}{\sqrt{2}}$	$m_6 = \frac{m_3+m_4}{\sqrt{2}}$
d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$d_7 = \frac{m_5-m_6}{\sqrt{2}}$	$m_7 = \frac{m_5+m_6}{\sqrt{2}}$

4	1	5	6	9	3	7	9
2,12	-0,71	4,24	-1,41	3,54	7,78	8,49	11,31
2,12	-0,71	4,24	-1,41	-3	-2	8	14
2,12	-0,71	4,24	-1,41	-3	-2	-4,24	15,56

Nun führen wir das Thresholding durch und setzen alle Werte, die kleiner als ϵ sind gleich Null.
Für unser Beispiel wählen wir $\epsilon = 2,5$.

d'_1	d'_2	d'_3	d'_4	d'_5	d'_6	d'_7	m'_7
d'_1	d'_2	d'_3	d'_4	d'_5	d'_6	$m'_5 = \frac{m'_7+d'_7}{\sqrt{2}}$	$m'_6 = \frac{m'_7-d'_7}{\sqrt{2}}$
d'_1	d'_2	d'_3	d'_4	$m'_1 = \frac{m'_5+d'_5}{\sqrt{2}}$	$m'_2 = \frac{m'_5-d'_5}{\sqrt{2}}$	$m'_3 = \frac{m'_6+d'_6}{\sqrt{2}}$	$m'_4 = \frac{m'_6-d'_6}{\sqrt{2}}$
$v'_1 = \frac{m'_1+d'_1}{\sqrt{2}}$	$v'_2 = \frac{m'_1-d'_1}{\sqrt{2}}$	$v'_3 = \frac{m'_2+d'_2}{\sqrt{2}}$	$v'_4 = \frac{m'_2-d'_2}{\sqrt{2}}$	$v'_5 = \frac{m'_3+d'_3}{\sqrt{2}}$	$v'_6 = \frac{m'_3-d'_3}{\sqrt{2}}$	$v'_7 = \frac{m'_4+d'_4}{\sqrt{2}}$	$v'_8 = \frac{m'_4-d'_4}{\sqrt{2}}$

0	0	4,24	0	-3	0	-4,24	15,56
0	0	4,24	0	-3	0	8	14
0	0	4,24	0	3,54	7,78	9,9	9,9
2,5	2,5	5,5	5,5	10	4	7	7

4.6 Bildverarbeitung

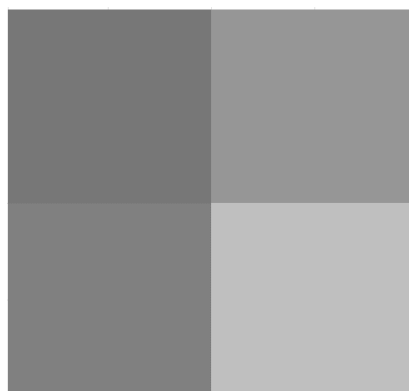
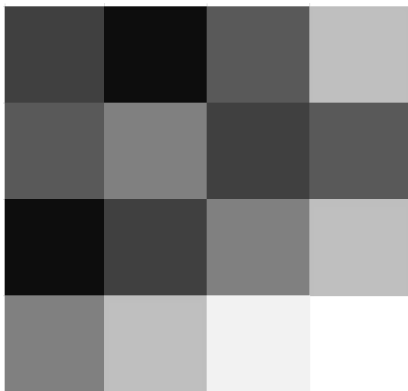
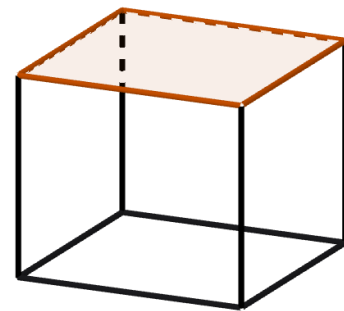
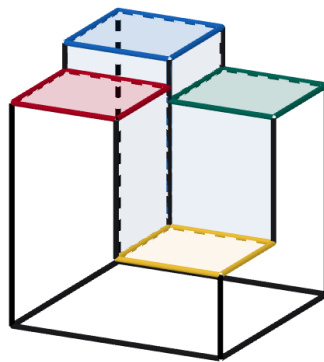
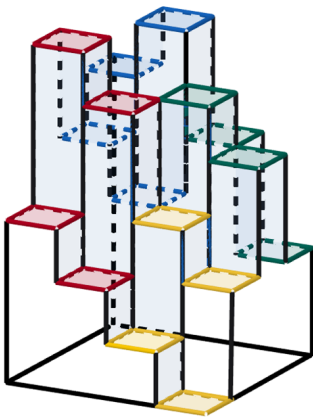
Wir können die gesamte Theorie über die Haar-Basis und den Haar-Algorithmus ins Zweidimensionale übertragen. Dabei betrachten wir Pixelquadrate mit 2^{2n} Pixeln. Wir betrachten in diesem Kapitel stark vereinfachte Beispiele mit wenigen Pixeln und ausschließlich Graustufen. Jeder Graustufe wird ein Wert zugewiesen: Je höher der Wert ist, desto dunkler ist der Grauton. Diese Theorie wird unter anderem in der modernen Bildverarbeitung verwendet, um Bilder zu komprimieren.

Wir betrachten ein Bild mit 4×4 Pixeln, um den Grundgedanken zu verdeutlichen. Wie zuvor mit der Haarbasis des $\mathbb{R}^n$ können wir in verschiedenen Stufen approximieren. Wir können aus acht Pixeln vier machen, indem wir jeweils den Mittelwert von vier benachbarten Pixeln bilden. Noch ungenauer wird die Approximation, wenn wir nur einen Gesamt-Mittelwert speichern.

5	6	4	2
4	3	5	4
6	5	3	2
3	2	1	0

4,5	4,5	3,75	3,75
4,5	4,5	3,75	3,75
4	4	1,5	1,5
4	4	1,5	1,5

3,44	3,44	3,44	3,44
3,44	3,44	3,44	3,44
3,44	3,44	3,44	3,44
3,44	3,44	3,44	3,44



Auch den Haar-Algorithmus können wir auf Pixelquadrate anwenden, wenn wir ihn etwas anpassen. Dieser hat den Vorteil, dass Stellen, an denen die Werte stärker voneinander abweichen, feiner dargestellt werden als solche, bei denen auf größeren Flächen sehr ähnliche Farbtöne vorliegen.

Von einem 2×2 Pixel Bild berechnen wir einmal den Mittelwert aller vier Werte. Statt einer Differenz berechnen wir nun drei Differenzwerte, einmal die horizontale Differenz d_h der oberen und unteren Pixel, die vertikale Differenz d_v der linken und rechten Pixel, und zuletzt d_d , die Differenz der Diagonalen.

Aus Gründen der Normerhaltung multiplizieren wir auch hier den Mittelwert mit dem Faktor 2 und die Differenzen mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

Anstelle der Werte

q	r
s	t

 speichern wir dann

m	d_h
d_v	d_d

 mit

$$m = \frac{q + r + s + t}{2} \quad d_h = \frac{q + r - s - t}{2} \quad d_v = \frac{q - r + s - t}{2} \quad d_d = \frac{q - r - s + t}{2}$$

Die ursprünglichen Werte lassen sich also mit folgenden Formeln berechnen:

$$q = \frac{m + d_h + d_v + d_d}{2} \quad r = \frac{m + d_h - d_v - d_d}{2} \quad s = \frac{m - d_h + d_v - d_d}{2} \quad t = \frac{m - d_h - d_v + d_d}{2}$$

Der Haar-Algorithmus für ein Bild mit 4x4 Pixeln:

- 1) Man unterteilt das Pixelquadrat in 4 kleinere 2x2 Pixelquadrate.
- 2) Man berechnet jeweils m, d_h, d_v und d_d . Die Mittelwerte speichert man oben links, die Differenzen d_h oben rechts usw.
- 3) Man führt den Algorithmus erneut mit den Mittelwerten durch, die Differenzen bleiben stehen. Nun haben wir den gesamten Mittelwert ganz oben links gespeichert, alle anderen Werte sind Differenzen.
- 4) Das Thresholding erfolgt mit gegebenem Schwellenwert ϵ , wie schon aus dem letzten Kapitel bekannt: Alle Werte, die kleiner als ϵ sind, werden genullt.
- 5) Für die erste Rücktransformation betrachtet man nur die oberen linken vier Werte und transformiert diese mithilfe der Formeln für die Rücktransformation wieder zurück.
- 6) Im letzten Schritt wird es etwas knifflig, schaut Euch auf jeden Fall die Abbildung auf der nächsten Seite gut an. Die Werte der linken oberen Pixel berechnen sich durch die Formeln der Rücktransformationen aus den jeweils oberen linken Werten der vier kleineren 2x2 Pixelquadrate, die rechten oberen Pixel aus den rechten oberen Werten der 2x2 Quadrate usw.

Auf dieser Seite ist der Algorithmus für ein 4x4 Pixelquadrat noch einmal farblich dargestellt. Wenn man größere Pixelfelder betrachtet, geht man im Grunde genau gleich vor. In der ersten Transformation berechnet man stets für alle 2x2 Quadrate m, d_h, d_v und d_d . Bei einem 8x8 Quadrat stehen dann nach der ersten Transformation in den oberen linken 16 Feldern alle Mittelwerte, in den 16 oberen rechten Feldern alle d_h usw. Man arbeitet in der nächsten Transformation nur noch mit den Mittelwerten weiter, einem 4x4 Quadrat. Ab hier geht man dann also exakt so vor, wie oben beschrieben.

$$\begin{aligned} m_i &= \frac{p_i + q_i + r_i + s_i}{2} \\ h_i &= \frac{p_i + q_i - r_i - s_i}{2} \\ v_i &= \frac{p_i - q_i + r_i - s_i}{2} \\ d_i &= \frac{p_i - q_i - r_i + s_i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}{2} \\ h &= \frac{m_1 + m_2 - m_3 - m_4}{2} \\ v &= \frac{m_1 - m_2 + m_3 - m_4}{2} \\ d &= \frac{m_1 - m_2 - m_3 + m_4}{2} \end{aligned}$$

p_1	q_1	p_2	q_2
r_1	s_1	r_2	s_2
p_3	q_3	p_4	q_4
r_3	s_3	r_4	s_4

1) Original

m_1	m_2	h_1	h_2
m_3	m_4	h_3	h_4
v_1	v_2	d_1	d_2
v_3	v_4	d_3	d_4

2) Transformation 1

m	h	h_1	h_2
v	d	h_3	h_4
v_1	v_2	d_1	d_2
v_3	v_4	d_3	d_4

3) Transformation 2

6) Rücktransformation 2

p'_1	q'_1	p'_2	q'_2
r'_1	s'_1	r'_2	s'_2
p'_3	q'_3	p'_4	q'_4
r'_3	s'_3	r'_4	s'_4

5) Rücktransformation 1

m'_1	m'_2	h'_1	h'_2
m'_3	m'_4	h'_3	h'_4
v'_1	v'_2	d'_1	d'_2
v'_3	v'_4	d'_3	d'_4

4) Thresholding

m'	h'	h'_1	h'_2
v'	d'	h'_3	h'_4
v'_1	v'_2	d'_1	d'_2
v'_3	v'_4	d'_3	d'_4

$$\begin{aligned} p'_i &= \frac{m'_i + h'_i + v'_i + d'_i}{2} \\ q'_i &= \frac{m'_i + h'_i - v'_i - d'_i}{2} \\ r'_i &= \frac{m'_i - h'_i + v'_i - d'_i}{2} \\ s'_i &= \frac{m'_i - h'_i - v'_i + d'_i}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m'_1 &= \frac{m' + h' + v' + d'}{2} \\ m'_2 &= \frac{m' + h' - v' - d'}{2} \\ m'_3 &= \frac{m' - h' + v' - d'}{2} \\ m'_4 &= \frac{m' - h' - v' + d'}{2} \end{aligned}$$

Beispiel: Wir approximieren das Beispiel von Seite 46 mit dem Haar-Algorithmus mit Schwellenwert $\epsilon = 1,2$.

5	6	4	2
4	3	5	4
6	5	3	2
3	2	1	0

Original

9	7,5	2	-1,5
8	3	3	2
0	1,5	-1	0,5
1	1	0	0

Transformation 1

13,75	2,75	2	-1,5
3,25	-1,75	3	2
0	1,5	-1	0,5
1	1	0	0

Transformation 2

Rücktransformation 2

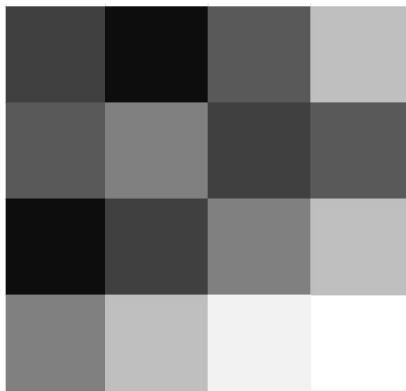
5,5	5,5	3,75	2,25
3,5	3,5	5,25	3,75
5,5	5,5	2,5	2,5
2,5	2,5	0,5	0,5

Rücktransformation 1

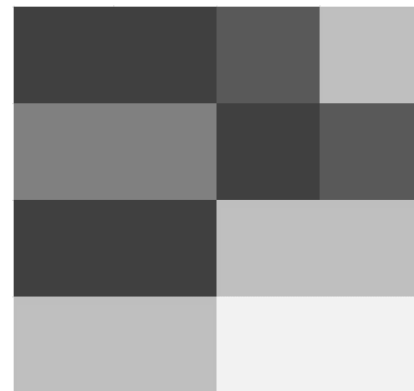
9	7,5	2	-1,5
8	3	3	2
0	1,5	0	0
0	0	0	0

Thresholding

13,75	2,75	2	-1,5
3,25	-1,75	3	2
0	1,5	0	0
0	0	0	0



Original



Approximation

Aufgabe 16

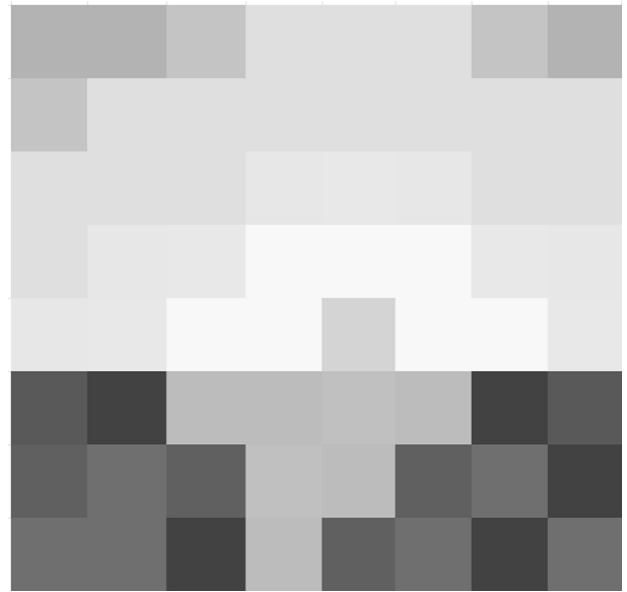
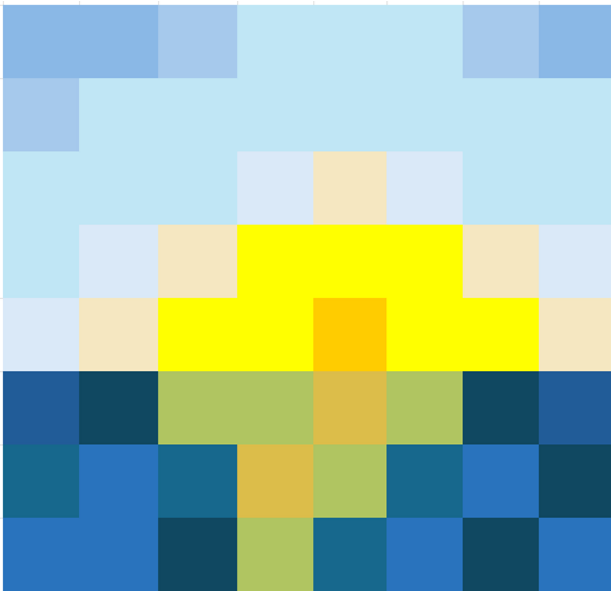
Führt den Haar-Algorithmus mit Schwellenwert ϵ durch.

a) $\epsilon = 1,5$

5	3,5	1	8
1	9	8	9,5
3	4	10	8,8
5,2	3,4	4	6

b) $\epsilon = 2$

11,2	8,9	3	3,5
9	10	10	4
14	12,7	6	7,3
13	3,4	4	5



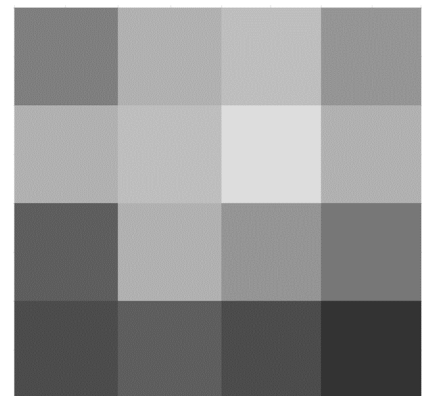
Das 8x8 Pixel Bild von einem Sonnenuntergang ist durch folgende Werte gegeben:

5	5	4	2	2	2	4	5
4	2	2	2	2	2	2	2
2	2	2	2,8	2,5	2,8	2	2
2	2,8	2,5	0,5	0,5	0,5	2,5	2,8
2,8	2,5	0,5	0,5	3	0,5	0,5	2,5
8	9	4	4	3,5	4	9	8
7	6	7	3,5	4	7	6	9
6	6	9	4	7	6	9	6

Original

Approximiert man, indem man aus jeweils 4 Werten den Mittelwert berechnet, erhält man

4	4	2,5	2,5	2	2	3,25	3,25
4	4	2,5	2,5	2	2	3,25	3,25
2,2	2,2	1,95	1,95	1,58	1,58	2,33	2,33
2,2	2,2	1,95	1,95	1,58	1,58	2,33	2,33
5,58	5,58	2,25	2,25	2,75	2,75	5	5
5,58	5,58	2,25	2,25	2,75	2,75	5	5
6,25	6,25	5,88	5,88	6	6	7,5	7,5
6,25	6,25	5,88	5,88	6	6	7,5	7,5



Das so entstandene Bild ist jedoch wirklich sehr ungenau.

Aufgabe 17

Führt den Haar-Algorithmus mit einem Schwellenwert von $\epsilon = 1,5$ für die vorletzte Tabelle (Original) durch.

5 Anhang

Der Anhang bietet weiterführende Informationen, die für den Wettbewerb nicht relevant sind.

5.1 Skalarprodukt und Winkel

In diesem Kapitel wollen wir das Skalarprodukt aus einem etwas anderen Blickwinkel betrachten und es über den Kosinussatz definieren.

Kosinussatz

Sei $\triangle ABC$ ein beliebiges Dreieck mit den Seiten a, b, c und dem Winkel γ am Punkt C .
Es gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Beweis:

Fall 1: $\gamma < 90^\circ$

Wir können nach dem Satz des Pythagoras schreiben:

$$a^2 = h^2 + d^2 \quad c^2 = h^2 + e^2$$

Wenn wir die erste Gleichung nach h^2 umstellen und in die zweite einsetzen erhalten wir

$$h^2 = a^2 - d^2 \quad c^2 = (a^2 - d^2) + e^2$$

Desweiteren können wir e als Teilstrecke von b betrachten und somit gilt $e = b - d$

Dies setzen wir erneut ein:

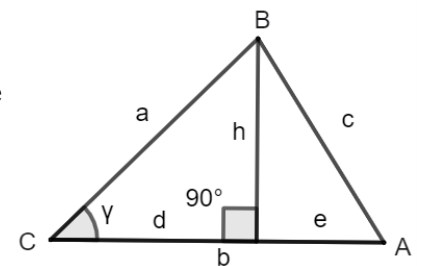
$$c^2 = (a^2 - d^2) + (b - d)^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot d$$

Zum Schluss drücken wir d mithilfe des Kosinus des Winkels γ aus. Es gilt

$$\cos(\gamma) = \frac{d}{a} \iff d = \cos(\gamma) \cdot a$$

Das setzen wir für d ein und erhalten den Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

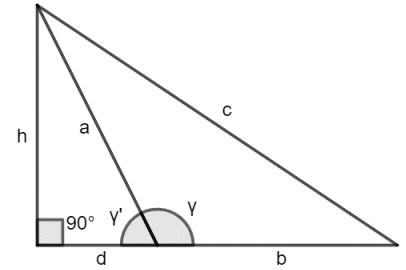


Fall 2: $\gamma > 90^\circ$

$$a^2 = h^2 + d^2 \quad c^2 = h^2 + (d + b)^2$$

Wenn wir die erste Gleichung nach h^2 umstellen und in die zweite einsetzen erhalten wir

$$h^2 = a^2 - d^2 \quad c^2 = (a^2 - d^2) + (d + b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot b \cdot d$$



Zum Schluss drücken wir d mithilfe des Kosinus des Winkels γ aus.

Zunächst gilt $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ und allgemein $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos(\gamma)$

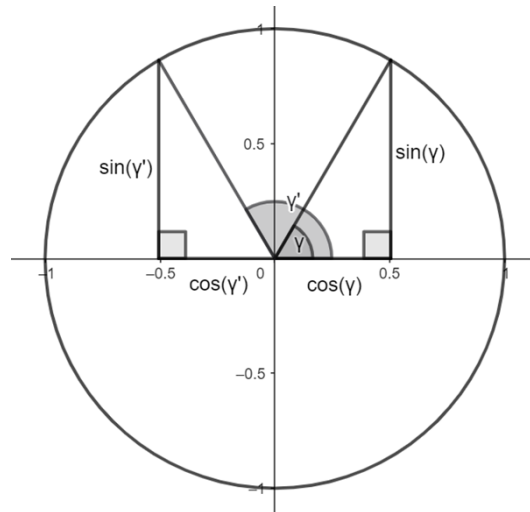
Daraus folgt:

$$-\cos(\gamma) = \cos(\gamma') = \frac{d}{a} \iff d = -\cos(\gamma) \cdot a$$

Das setzen wir für d ein und erhalten auch für diesen Fall den Kosinussatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$$

Die Gleichheit $\cos(180^\circ - \gamma) = -\cos(\gamma)$ kann man sich leicht mithilfe des Einheitskreises verdeutlichen:



Fall 3: $\gamma = 90^\circ$

In diesem Fall gilt der Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(90^\circ) = a^2 + b^2$

Der Kosinussatz im $\mathbb{R}^2$

Wir können, wie zuvor den Satz des Pythagoras, auch den Kosinussatz für Vektoren des $\mathbb{R}^2$ einführen:

$$\|\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma).$$

Wir haben das Skalarprodukt als die Hälfte der Abweichung vom Pythagoras definiert. Der Kosinussatz verdeutlicht, dass wir den halben Pythagorasdefekt abhängig vom Winkel γ schreiben können, als

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\gamma).$$

Wir können also mithilfe des Skalarprodukts Winkel im $\mathbb{R}^2$ ausdrücken und berechnen.

Interessant wird das vor allem, sobald wir das auf höhere Dimensionen übertragen.

Im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ definieren wir

$$\cos(\gamma) := \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$$

Dadurch erhalten wir eine Bedeutung für den Kosinus und für Winkel in Vektorräumen, die gänzlich außerhalb unserer Vorstellungskraft liegen.

5.2 Beweis: Eindeutigkeit der Dimension

Wir wollen beweisen, dass jede Basis desselben Vektorraums immer aus gleich vielen Vektoren besteht, also dass die Dimension eines Vektorraums eindeutig ist.

Angenommen, B_1 und B_2 sind beides Basen für den Vektorraum V . B_1 bestehe aus n Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_n$ und B_2 aus m Vektoren $w_1, w_2, \dots, w_m$.

Beweis. Wir nehmen $n < m$ an.

Beweisidee. Man tauscht die Basiselemente v_i der Basis B_1 gegen n Basiselemente w_j der zweiten Basis aus und erhält so eine neue Basis $w_1, \dots, w_n$ von V . Dann ließen sich aber die Elemente $w_{n+1}, \dots, w_m$ als Linearkombination der $w_1, \dots, w_n$ schreiben und $w_1, \dots, w_m$ wäre kein minimales Erzeugendensystem und daher nach Definition keine Basis, was zu einem Widerspruch führt. Daher war die Annahme $n < m$ falsch. Gleich kann man mit der Annahme $m < n$ verfahren, so dass nur der Fall $n = m$ möglich und der Beweis erbracht ist.

Nun führen wir das alles aus und beweisen die Details: Wir nehmen an, wir haben bereits eine Basis der Form $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ von V gefunden und wollen zeigen, wie man dann v_k durch eines der w_j ersetzen, also austauschen, kann, ohne dass die Eigenschaft einer Basis verloren geht. Hier soll auch der Fall $k = 1$ zugelassen sein, in dem man noch am Beginn des Austauschprozesses steht. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien also $w_k, \dots, w_n$ noch nicht zum Austausch der v_i verwendet worden. Dann lassen sich alle w_j für $j \in \{k, \dots, n\}$ als Linearkombination der $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ schreiben. Es muss dabei mindestens ein w_j ($j \in \{k, \dots, n\}$) geben, so dass in dessen Linearkombination der Koeffizient von v_k von 0 verschieden ist. Denn ansonsten wären alle $w_1, \dots, w_m$ (und damit auch v_k) darstellbar als Linearkombination der $(n-1)$ -elementigen Menge $w_1, \dots, w_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$. Dann aber wäre $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ kein minimales Erzeugendensystem und daher nach Definition keine Basis gewesen, Widerspruch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei w_k dieses Basiselement. Also hat w_k eine Darstellung

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \dots + \lambda_n v_n \quad (*)$$

mit $\lambda_k \neq 0$. Wir zeigen nun, dass

$$w_1, \dots, w_{k-1}, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

eine Basis von V ist.

Beweis der ersten Teilaussage: Es handelt sich um ein Erzeugendensystem.

Wir müssen nur zeigen, dass sich v_k aus diesen Elementen erzeugen lässt, da wir bereits wissen, dass $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem ist. Denn wenn sich alle Vektoren des Erzeugendensystems $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n$ erzeugen lassen, dann natürlich auch jeder Vektor des Vektorraums. Nun können wir aber wegen $\lambda_k \neq 0$ in (*) einfach nach v_k auflösen und erhalten:

$$v_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}w_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}w_{k-1} - \frac{1}{\lambda_k}w_k - \frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}v_{k+1} - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_k}v_n, \quad (**)$$

also eine Linearkombination der gewünschten Form.

Beweis der zweiten Teilaussage: Es handelt sich um ein minimales Erzeugendensystem, das heißt kein Element der Menge lässt sich linear durch die anderen Elemente kombinieren.

In jedem Fall gilt das für w_k . Könnte man nämlich w_k alleine durch $w_1, \dots, w_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ ausdrücken, so wegen (**) auch v_k . Dann wäre aber $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ keine Basis. Aber auch alle weiteren Elemente lassen sich nicht durch die anderen linear kombinieren. Der Beweis für die w_j ($j = 1, \dots, k-1$) und v_i ($i = k+1, \dots, n$) funktioniert dabei analog, so dass wir ihn hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit für w_1 führen. Wäre die behauptete Aussagen für w_1 falsch, so gäbe es Koeffizienten $\mu_2, \dots, \mu_n$ mit

$$w_1 = \mu_2 w_2 + \dots + \mu_k w_k + \mu_{k+1} v_{k+1} + \dots + \mu_n v_n.$$

Hierbei muss $\mu_k \neq 0$ sein, denn ansonsten wäre wieder $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ keine Basis. Wir setzen für w_k (*) ein und erhalten nach Umformung

$$w_1 = \mu_k \lambda_1 w_1 + (\mu_2 + \mu_k \lambda_2) w_2 + \dots + (\mu_{k-1} + \mu_k \lambda_{k-1}) w_{k-1} + \mu_k \lambda_k v_k + (\mu_{k+1} + \mu_k \lambda_{k+1}) v_{k+1} + \dots + (\mu_n + \mu_k \lambda_n) v_n$$

mit

$$\mu_k \lambda_k \neq 0.$$

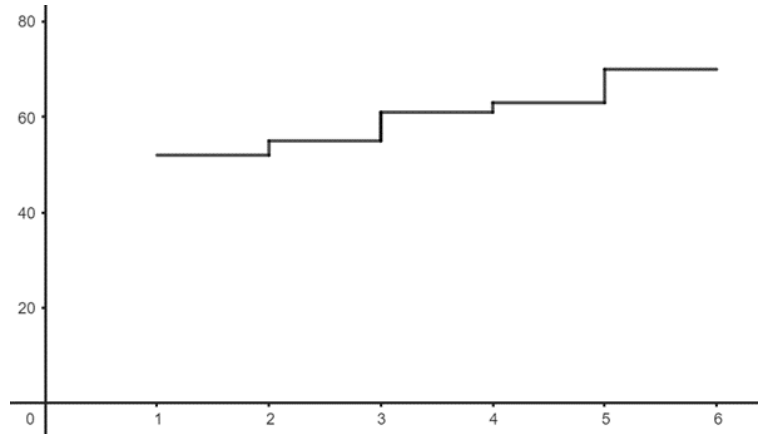
Nun aber könnten wir nach v_k auflösen und somit v_k als Linearkombination von $w_1, \dots, w_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ schreiben. Damit wäre aber $w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ nach Definition keine Basis, Widerspruch.

5.3 Anpassung von Funktionen an Messreihen

In diesem Kapitel des Anhangs betrachten wir eine alternative Variante von Kapitel 3.2.1 über die beste lineare Approximation und verallgemeinern anschließend die Theorie auf ganzrationale Funktionen vom Grad k .

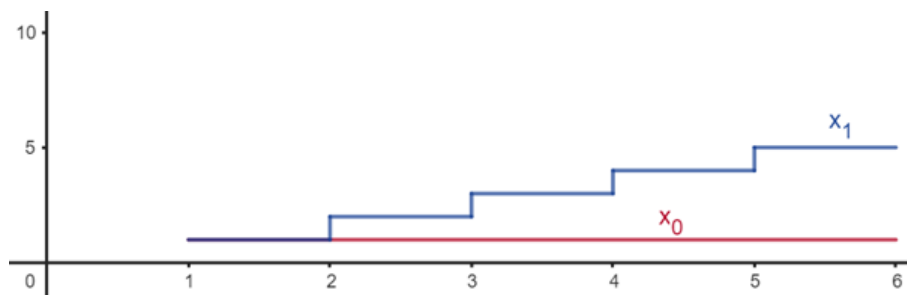
5.3.1 Die beste lineare Approximation im Raum der stückweise konstanten Funktionen

Stückweise konstante Funktionen, auch Treppenfunktionen genannt, nehmen auf bestimmten Intervallen immer einen konstanten Wert an und erinnern optisch an eine Treppe. In diesem Fall beschreiben die Einträge von $\vec{y}$ die fünf verschiedenen „Stufenhöhen“ einer solchen Funktion:



Nun projizieren wir $\vec{y}$ auf den Unterraum U aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[1,6[$ mit konstanten Abständen. Anders gesagt: Dieser Unterraum enthält alle Treppenfunktionen, bei denen alle Stufen den gleichen Abstand zueinander haben. Eine mögliche Basis für diesen Raum ist zum Beispiel

$$x_0(t) = \begin{cases} 1, & 1 \leq t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad x_1(t) = \begin{cases} 1, & 2 \leq t < 3 \\ 2, & 3 \leq t < 4 \\ 3, & 4 \leq t < 5 \\ 4, & 5 \leq t < 6 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

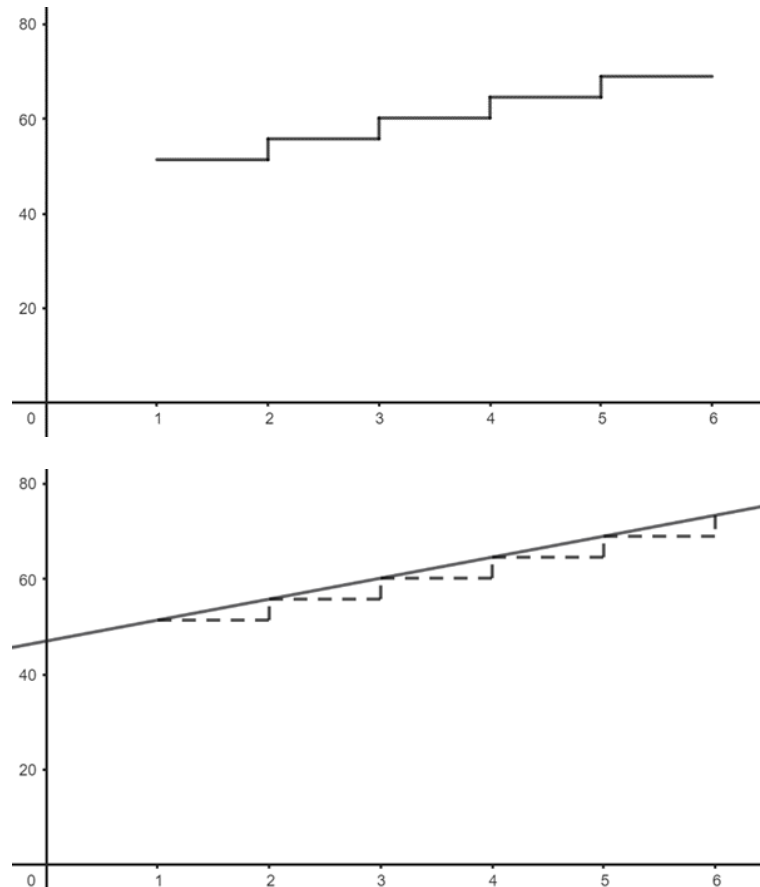


Diese Funktionen können wir auch wieder mit Spaltenvektoren identifizieren und erhalten so die gleiche Basis wie im ersten Ansatz:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Alle Treppenfunktionen in U können wir als Geraden auffassen, denn der konstante Abstand der Stufen entspricht der konstanten Steigung einer Geraden.

Projizieren wir nun $\vec{y}$ auf U , erhalten wir $\vec{y}_U = 47 \cdot \vec{x}_0 + 4,4 \cdot \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 51,4 \\ 55,8 \\ 60,2 \\ 64,6 \\ 69 \end{pmatrix}$.



Wie ihr seht, führt diese Variante zum selben Ergebnis und wir führen auch die selben Rechnungen durch. Wir interpretieren die Vektoren jedoch in einem anderen Vektorraum. Mit dem Vektorraum der stückweise konstanten Funktionen haben wir angedeutet, dass man auch Vektorräume von Funktionen definieren kann. Dabei kann man neben dem Raum der stückweise konstanten Funktionen auch viele andere, wie zum Beispiel den Raum aller stetigen Funktionen betrachten. Auch in diesen wirklich sehr abstrakten Räumen kann man ein Skalarprodukt definieren und somit ebenfalls orthogonal auf Unterräume projizieren. Darauf wollen wir in diesem Material zwar nicht weiter eingehen, jedoch zeigt dieses Beispiel uns auf, dass es noch viele weitere spannende Verwendungen der hier erlernten Grundlagen gibt.

5.3.2 Verallgemeinerungen auf ganzrationale Funktionen vom Grad k

Oftmals ist es jedoch gar nicht so geschickt, eine Messreihe durch eine lineare Funktion zu approximieren. In solchen Fällen sucht man die beste Näherung durch eine ganzrationale Funktion eines bestimmten Grades.

Diese beste Näherung ist dabei die Funktion f_k mit dem Grad k und

$$f_k(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_k \cdot x^k$$

für die die Abstände zwischen den einzelnen Punkten $P(x_1, y_1), P(x_2, y_2), \dots, P(x_n, y_n)$ der Messreihe und dem Graphen von f_k insgesamt minimal sind.

Den Abstand messen wir mit dem gleichen Maß, der Abstandsquadratsumme, das wir auch schon bei den linearen Funktionen verwendet haben.

$$d(\vec{y}, f_k) = (y_1 - f_k(x_1))^2 + (y_2 - f_k(x_2))^2 + \dots + (y_n - f_k(x_n))^2$$

Wählen wir f_k so, dass diese Summe minimal wird, erhalten wir mit f_k die beste ganzrationale Näherung vom Grad k .

Wir fassen alle y -Werte als einen Vektor des $\mathbb{R}^n$ auf:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Wir wollen $\vec{y}$ auf einen $(k+1)$ -dimensionalen Unterraum des $\mathbb{R}^n$ mit der Basis $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ projizieren, sodass

$$\vec{y}_U = a_0 \cdot \vec{x}_0 + a_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + a_k \cdot \vec{x}_k$$

Dann ist $f_k(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k$ die beste ganzrationale Approximation vom Grad k .

Wir definieren den Unterraum U als den von folgenden Vektoren aufgespannten $(k+1)$ -dimensionalen Raum:

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \vdots \\ x_n^k \end{pmatrix}$$

Die beste Approximation von y durch ein Polynom vom Grad k ist dann gegeben durch die Orthogonalprojektion von $\vec{y}$ auf U .

Orthogonalprojektion und Rücktransformation

Wie schon zuvor, müssen wir zunächst mit dem Gram-Schmidt Verfahren orthogonalisieren. Wir erhalten also eine Orthogonalbasis $\vec{o}_0, \dots, \vec{o}_k$ und berechnen

$$\vec{y}_U = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_0 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{o}_0 + \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \vec{o}_1 + \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \cdot \vec{o}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_k \rangle}{\langle \vec{o}_k, \vec{o}_k \rangle} \cdot \vec{o}_k$$

Für die so berechneten Koeffizienten

$$a'_0 = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_0 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \quad a'_1 = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \quad a'_2 = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_2, \vec{o}_2 \rangle} \quad \dots \quad a'_k = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_k \rangle}{\langle \vec{o}_k, \vec{o}_k \rangle}$$

erfolgt zum Schluss die Rücktransformation und wir setzen die Terme des Gram-Schmidt Verfahrens stückweise für alle $\vec{o}_i$ ein.

$$\begin{aligned} \vec{o}_0 &= \vec{x}_0 \\ \vec{o}_1 &= \vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{o}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \left(\vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 \right) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Das sieht erst einmal nach viel Rechenaufwand aus, bedenkt aber, dass ihr auch hier bereits die Koeffizienten alle berechnet habt!

$$\begin{aligned} \vec{y}_U &= a'_0 \cdot \vec{o}_0 + a'_1 \cdot \vec{o}_1 + a'_2 \cdot \vec{o}_2 + \dots \\ &= a'_0 \cdot \vec{x}_0 + a'_1 \cdot \left(\vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 \right) \\ &\quad + a'_2 \cdot \left(\vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 - \frac{\langle \vec{o}_1, \vec{x}_2 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \cdot \left(\vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{o}_0, \vec{x}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{x}_0 \right) \right) + \dots \\ &\quad \vdots \text{ ausmultiplizieren und vereinfachen} \\ &= a_0 \cdot \vec{x}_0 + a_1 \cdot \vec{x}_1 + a_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots \end{aligned}$$

Die beste Approximation vom Grad k ist somit $f_k(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_k \cdot x^k$.

5.4 Lösungen

Aufgabe 1

- a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+9 \\ 2-3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix}$
- b) $-4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} + 37 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$
- c) $6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$
- d) $\frac{5}{8} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{16^2 + 2^2} = \sqrt{256 + 4} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65} \\ \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ \left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} \\ \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{49 + 16} = \sqrt{65} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2\sqrt{65}} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt{65}} \\ \frac{1}{\sqrt{65}} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} &= \frac{1}{3\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{3\sqrt{5}} \\ \frac{3}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ \frac{1}{\left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{65}} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{\sqrt{65}} \\ \frac{4}{\sqrt{65}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\vec{b} - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 11 \\ -4 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11^2 + (-4)^2} = \sqrt{121 + 16} = \sqrt{137}$$

$$\|\overrightarrow{AC}\| = \|\vec{c} - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{5^2 + (-11)^2} = \sqrt{25 + 121} = \sqrt{146}$$

$$\|\overrightarrow{AD}\| = \|\vec{d} - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -9 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-9)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 81} = \frac{\sqrt{325}}{2} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \|\vec{c} - \vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ -7 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-6)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85}$$

$$\|\overrightarrow{BD}\| = \|\vec{d} - \vec{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{21}{2} \\ -5 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{-21}{2}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + 25} = \sqrt{\frac{541}{4}} = \frac{\sqrt{541}}{2}$$

$$\|\overrightarrow{CD}\| = \|\vec{d} - \vec{c}\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{9}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 4} = \sqrt{\frac{97}{4}} = \frac{\sqrt{97}}{2}$$

b)

$$\begin{aligned} \|\vec{a} - \vec{b}\| &= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = \sqrt{(-(b_1 - a_1))^2 + (-(b_2 - a_2))^2} \\ &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} = \|\vec{b} - \vec{a}\| \\ &\Rightarrow \|\vec{b} - \vec{a}\| = \|\vec{a} - \vec{b}\| \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2 = \|\vec{a}\|^2$$

b)

i) Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 = 7 \neq 0.$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = -6 + 3 = -3 \neq 0.$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 3 = 10 \neq 0.$$

Keines der Skalarprodukte ist 0, also gibt es keinen rechten Winkel bei den Punkten $A(1,1), B(4,2), C(2,5)$. Daher ist das Dreieck nicht rechtwinklig.

ii) Gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \cdot 0 + 0 \cdot 5 = 0.$$

Da das Skalarprodukt 0 ist, sind $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal. Somit bilden $A(1,2), B(5,2), C(1,7)$ die Eckpunkte eines rechtwinkligen Dreiecks (rechter Winkel bei A).

c)

$$\text{i) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gesucht: } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

$$5x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (\text{z. B.})$$

$$\text{ii) } \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Gesucht: } \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle = 0 \text{ und } \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = 0$$

$$6x + 2y = 0 \Rightarrow y = -3x$$

$$-1x + 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$$

Die einzige Lösung hier ist $x = 0, y = 0$. Daher ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der einzige Vektor in $\mathbb{R}^2$, der zu $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ orthogonal ist.

Aufgabe 5

a)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot (||\vec{a} + \vec{b}||^2 - ||\vec{a}||^2 - ||\vec{b}||^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot ((a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 + (a_3 + b_3)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a_1^2 + 2 \cdot a_1 \cdot b_1 + b_1^2 + a_2^2 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + b_2^2 + a_3^2 + 2 \cdot a_3 \cdot b_3 + b_3^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 - b_1^2 - b_2^2 - b_3^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot a_1 \cdot b_1 + 2 \cdot a_2 \cdot b_2 + 2 \cdot a_3 \cdot b_3) \\ &= a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 \end{aligned}$$

b)

$$||\vec{a}||^2 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle$$

Aufgabe 6

Gesucht sind Skalare $r, s, t \in \mathbb{R}$, sodass gilt:

$$r \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2 + t \cdot \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit den gegebenen Basisvektoren:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

$$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise:

$$2r + s = 4 \quad (1)$$

$$-2r + 4t = 1 \quad (2)$$

$$r + 3s - t = 2 \quad (3)$$

Lösen des Gleichungssystems:

Aus (1): $s = 4 - 2r$

Einsetzen in (3):

$$r + 3(4 - 2r) - t = 2 \Leftrightarrow r + 12 - 6r - t = 2 \Leftrightarrow -5r - t = -10 \Leftrightarrow t = -5r + 10$$

Einsetzen in (2):

$$-2r + 4(-5r + 10) = 1 \Leftrightarrow -2r - 20r + 40 = 1 \Leftrightarrow -22r = -39 \Leftrightarrow r = \frac{39}{22}$$

Dann:

$$s = 4 - 2r = 4 - 2 \cdot \frac{39}{22} = \frac{88-78}{22} = \frac{10}{22} = \frac{5}{11}t = -5r + 10 = -5 \cdot \frac{39}{22} + 10 = -\frac{195}{22} + \frac{220}{22} = \frac{25}{22}$$

Ergebnis:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{39}{22} \cdot \vec{b}_1 + \frac{5}{11} \cdot \vec{b}_2 + \frac{25}{22} \cdot \vec{b}_3$$

Aufgabe 7

Zur Berechnung der Orthogonalprojektion eines Vektors $\vec{x}$ auf eine durch den Richtungsvektor $\vec{e}$ gegebene Gerade nutzen wir:

$$\vec{x}_{\vec{e}} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle}{\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle} \cdot \vec{e}$$

a)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 2 = 18, \quad \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 8^2 + 2^2 = 68$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\vec{e}} = \frac{18}{68} \cdot \vec{e} = \frac{9}{34} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

b)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 12 = 6 + 48 = 54, \quad \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 2^2 + 12^2 = 148$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\vec{e}} = \frac{54}{148} \cdot \vec{e} = \frac{27}{74} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 7 \cdot 3 = 2 - 8 + 21 = 15,$$

$$\langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = 1^2 + (-2)^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\vec{e}} = \frac{15}{14} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

d)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \vec{e} \rangle = 0 \cdot (-5) + (-1) \cdot 3 + (-3) \cdot 0 = -3, \quad \langle \vec{e}, \vec{e} \rangle = (-5)^2 + 3^2 = 34$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\vec{e}} = \frac{-3}{34} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8:

a) $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \neq 0$

Wir wenden das Gram-Schmidt-Verfahren an:

$$\vec{b}_1 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{b}_1}{\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_1} \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4}{5} \\ 1 - \frac{8}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Projektion:

$$\vec{v}_{\vec{b}_1} = \frac{9}{5} \cdot \vec{b}_1, \quad \vec{v}_{\vec{b}_2} = \frac{9}{9} \cdot \vec{b}_2 = \vec{b}_2$$

b) Die Basisvektoren sind bereits orthogonal: $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$

$$\vec{v}_{\vec{b}_1} = \frac{4}{1} \cdot \vec{u}_1 = 4 \cdot \vec{u}_1, \quad \vec{v}_{\vec{b}_2} = \frac{12}{4} \cdot \vec{u}_2 = 3 \cdot \vec{u}_2$$

c) $\vec{P}_{\vec{v}} = \frac{\langle \vec{P}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v} = \frac{3}{1} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{Abstand: } \|\vec{P} - \vec{P}_v\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$$

$$\text{d) } \vec{P}_{\vec{w}} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{w}}{\vec{w} \cdot \vec{w}} \vec{w} = \frac{2 \cdot 2}{4} \cdot \vec{w} = \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P}_E = \vec{P}_v + \vec{P}_{\vec{w}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Abstand: } \|\vec{P} - \vec{P}_E\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| = 6$$

Aufgabe 9

a)

$$\begin{aligned} \text{i) } \left\langle \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 22 \\ 13 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix} \right\rangle &= 5 \cdot (-3) + (-11) \cdot 22 + 6 \cdot 13 + 2 \cdot 7 + 9 \cdot (-7) \\ &= -15 - 242 + 78 + 14 - 63 = -228 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3.5 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle &= 6 \cdot 14 + (-2) \cdot 8 + 3.5 \cdot (-0.2) + (-6) \cdot 1 \\ &= 84 - 16 - 0.7 - 6 = 61.3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} 14 \\ 8 \\ -0.2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| &= \sqrt{14^2 + 8^2 + (-0.2)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{196 + 64 + 0.04 + 1} = \sqrt{261.04} \approx 16.16 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle &= (-12)(-14) + 1(-5) + 1(2) + 4(22) = 168 - 5 + 2 + 88 = 253 \neq 0 \\ \langle \vec{u}_1, \vec{u}_3 \rangle &= (-12)(1) + 1(4) + 1(3) + 4(-3) = -12 + 4 + 3 - 12 = -17 \neq 0 \\ \langle \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle &= (-14)(1) + (-5)(4) + 2(3) + 22(-3) = -14 - 20 + 6 - 66 = -94 \neq 0 \end{aligned}$$

Also sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander, wir wenden Gram-Schmidt an:

$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 \approx \begin{pmatrix} 4.75 \\ -6.56 \\ 0.44 \\ 15.75 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{u}_3, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.84 \\ 5.86 \\ 2.76 \\ -8.14 \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } \vec{v}_U = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_3 \rangle}{\langle \vec{w}_3, \vec{w}_3 \rangle} \vec{w}_3 \approx \begin{pmatrix} 2.15 \\ -0.18 \\ -0.18 \\ -0.72 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.73 \\ 2.39 \\ -0.16 \\ -5.75 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.9 \\ -6.25 \\ -2.95 \\ 8.69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.48 \\ -4.04 \\ -3.29 \\ 2.22 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 786 \\ 835 \\ 743 \\ 822 \\ 855 \\ 907 \\ 793 \\ 849 \\ 1009 \\ 846 \end{pmatrix} \quad \vec{t} = \begin{pmatrix} 970 \\ 962 \\ 726 \\ 767 \\ 911 \\ 927 \\ 717 \\ 819 \\ 725 \\ 646 \end{pmatrix}$$

Niklas Kaul:

$$\frac{\langle \vec{n}, \vec{b}_l \rangle}{\langle \vec{b}_l, \vec{b}_l \rangle} \cdot \vec{b}_l + \frac{\langle \vec{n}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \cdot \vec{b}_s + \frac{\langle \vec{n}, \vec{b}_w \rangle}{\langle \vec{b}_w, \vec{b}_w \rangle} \cdot \vec{b}_w \approx 0.64 \cdot \begin{pmatrix} 1846 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1024 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 846 \end{pmatrix} + 0.82 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1068 \\ 0 \\ 963 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1004 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.90 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 891 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 952 \\ 0 \\ 1009 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Till Steinforth:

$$\frac{\langle \vec{t}, \vec{b}_l \rangle}{\langle \vec{b}_l, \vec{b}_l \rangle} \cdot \vec{b}_l + \frac{\langle \vec{t}, \vec{b}_s \rangle}{\langle \vec{b}_s, \vec{b}_s \rangle} \cdot \vec{b}_s + \frac{\langle \vec{t}, \vec{b}_w \rangle}{\langle \vec{b}_w, \vec{b}_w \rangle} \cdot \vec{b}_w \approx 0,68 \cdot \begin{pmatrix} 1846 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 1024 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 846 \end{pmatrix} + 0,84 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1068 \\ 0 \\ 963 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1004 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,76 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 891 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 952 \\ 0 \\ 1009 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 20 \\ 38 \\ 65 \\ 79 \\ 95 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Wir orthogonalisieren zunächst die Basis $\vec{x}_0, \vec{x}_1$ und erhalten durch das Gram-Schmidt-Verfahren die orthogonale Basis

$$\vec{o}_0 = \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{o}_1 = \vec{x}_1 - \frac{\langle \vec{x}_1, \vec{o}_0 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \cdot \vec{o}_0 = \vec{x}_1 - 8 \cdot \vec{o}_0 = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Anschließend projizieren wir $\vec{y}$ auf den Unterraum U mit Basis $\vec{o}_0, \vec{o}_1$:

$$\vec{y}_U = \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_0 \rangle}{\langle \vec{o}_0, \vec{o}_0 \rangle} \vec{o}_0 + \frac{\langle \vec{y}, \vec{o}_1 \rangle}{\langle \vec{o}_1, \vec{o}_1 \rangle} \vec{o}_1 \approx 59,4 \cdot \vec{o}_0 + 4,775 \cdot \vec{o}_1$$

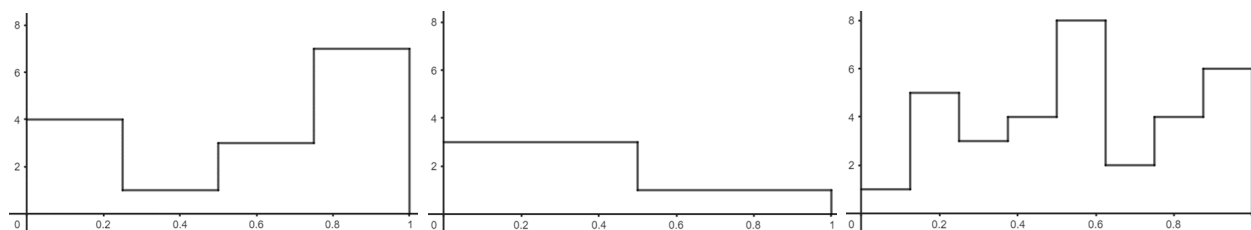
Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \vec{y}_U &= 59,4 \cdot \vec{x}_0 + 4,775 \cdot (\vec{x}_1 - 8 \cdot \vec{x}_0) \\ &= 59,4 \cdot \vec{x}_0 + 4,775 \cdot \vec{x}_1 - 4,775 \cdot 8 \cdot \vec{x}_0 \\ &= (59,4 - 38,2) \cdot \vec{x}_0 + 4,775 \cdot \vec{x}_1 \\ &= 21,2 \cdot \vec{x}_0 + 4,775 \cdot \vec{x}_1 \end{aligned}$$

Die beste lineare Approximation ist also die Funktion $f(x) = 4,775 \cdot x + 21,2$

Aufgabe 12

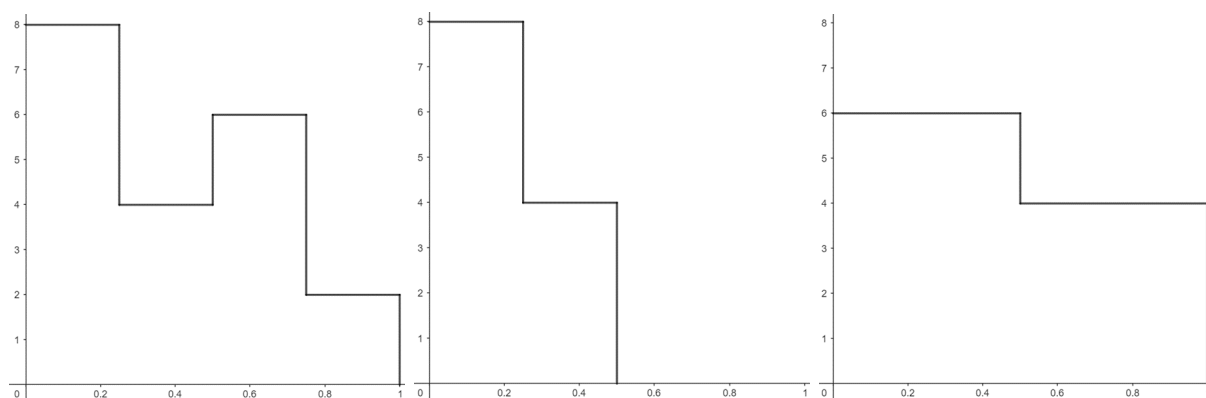
Die Graphen für a), b), c):



Aufgabe 13

a) Für alle gegebenen Vektoren ist das Skalarprodukt paarweise Null.

b) Die Graphen für i), ii), iii):



c)

$$4,125 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0,875 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0,25 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Die ersten fünf Vektoren der Haar-Basis für den $\mathbb{R}^{16}$ sind

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \vec{h}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{h}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{h}_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \vec{h}_5 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$

Aufgabe 14

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3,5 \\ 3,5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -0,5 \\ 0,5 \\ 3 \\ -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \approx 5,32 \quad \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 4 \\ 8 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\| \approx 13,08 \quad \delta = \frac{5,32}{13,08} \approx 0,41$$

Aufgabe 15

a)

2	5	5,3	6	4	3	1,5	9
-2,12	-0,49	0,71	-5,3	4,95	7,99	4,95	7,42
-2,12	-0,49	0,71	-5,3	-2,15	-1,75	9,15	8,75
-2,12	-0,49	0,71	-5,3	-2,15	-1,75	0,28	12,66

-2,12	-0	0	-5,3	-2,15	0	0	12,66
-2,12	-0	0	-5,3	-2,15	0	8,95	8,95
-2,12	0	0	-5,3	4,81	7,85	6,33	6,33
1,9	4,9	5,55	5,55	4,48	4,48	0,73	8,22

b)

3	3,3	4	9	5	8	1	2
-0,21	-3,54	-2,12	-0,71	4,45	9,19	9,19	2,12
-0,21	-3,54	-2,12	-0,71	-3,35	5	9,64	8
-0,21	-3,54	-2,12	-0,71	-3,35	5	1,16	12,47

0	-3,54	0	0	-3,35	5	0	12,47
0	-3,54	0	0	-3,35	5	8,82	8,82
0	-3,54	0	0	3,87	8,61	9,77	2,7
2,74	2,74	3,59	8,59	6,91	6,91	1,91	1,91

Aufgabe 16

a)

5	3,5	1	8
1	9	8	9,5
3	4	10	8,8
5,2	3,4	4	6

Original

9,25	13,25	-0,75	-2,75
7,8	14,4	-0,8	4,4
-3,25	-4,25	4,75	-2,75
0,4	-0,4	-1,4	1,6

Transformation 1

22,35	0,15	-0,75	-2,75
-5,3	1,3	-0,8	4,4
-3,25	-4,25	4,75	-2,75
0,4	-0,4	-1,4	1,6

Transformation 2

Rücktransformation 2

5,02	3,52	2,04	9,04
0,27	8,27	7,54	9,04
4,27	4,27	9,92	8,32
4,27	4,27	3,92	5,52

Rücktransformation 1

8,53	13,83	0	-2,75
8,53	13,83	0	4,4
-3,25	-4,25	4,75	-2,75
0	0	0	1,6

Thresholding

22,35	0	0	-2,75
-5,3	0	0	4,4
-3,25	-4,25	4,75	-2,75
0	0	0	1,6

b)

11,2	8,9	3	3,5
9	10	10	4
14	12,7	6	7,3
13	3,4	4	5

Original

19,55	10,25	0,55	-3,75
21,55	11,15	5,15	2,15
0,65	2,75	1,65	-3,25
5,4	-1,15	-4,15	-0,15

Transformation 1

31,25	-1,45	0,55	-3,75
9,85	-0,55	5,15	2,15
0,65	2,75	1,65	-3,25
5,4	-1,15	-4,15	-0,15

Transformation 2

Rücktransformation 2

10,28	10,28	3,23	3,73
10,28	10,28	10,23	4,23
13,48	12,23	6,43	6,43
12,03	2,93	4,28	4,28

Rücktransformation 1

20,55	10,7	0	-3,75
20,55	10,7	5,15	2,15
0	2,75	0	-3,25
5,4	0	-4,15	0

Thresholding

31,25	0	0	-3,75
9,85	0	5,15	2,15
0	2,75	0	-3,25
5,4	0	-4,15	0

Aufgabe 17

8	5	4	6,5	2	1	0	2,5
4,4	3,9	3,15	4,65	-0,4	0,9	2,15	-0,65
11,15	4,5	5,5	10	-5,85	-3,5	-2	-7
12,5	11,75	12	15	0,5	-1,25	-1	0
1	1	0	-0,5	-1	1	0	-0,5
-0,4	0,6	-0,15	-0,15	0,4	-1,4	-0,15	0,15
-0,35	0	1	-0,5	0,65	0	1,5	-1,5
0,5	4,25	-1	0	0,5	-0,75	-2	-3

10,65	9,15	2,35	1,35	2	1	0	2,5
20,13	21,25	-4,3	-5,75	-0,4	0,9	2,15	-0,65
1,75	-2	1,25	-0,5	-5,85	-3,5	-2	-7
3,7	-3,75	2,95	-0,75	0,5	-1,25	-1	0
1	1	0	-0,5	-1	1	0	-0,5
-0,4	0,6	-0,15	-0,15	0,4	-1,4	-0,15	0,15
-0,35	0	1	-0,5	0,65	0	1,5	-1,5
0,5	4,25	-1	0	0,5	-0,75	-2	-3

30,59	-10,79	2,35	1,35	2	1	0	2,5
0,19	1,31	-4,3	-5,75	-0,4	0,9	2,15	-0,65
1,75	-2	1,25	-0,5	-5,85	-3,5	-2	-7
3,7	-3,75	2,95	-0,75	0,5	-1,25	-1	0
1	1	0	-0,5	-1	1	0	-0,5
-0,4	0,6	-0,15	-0,15	0,4	-1,4	-0,15	0,15
-0,35	0	1	-0,5	0,65	0	1,5	-1,5
0,5	4,25	-1	0	0,5	-0,75	-2	-3

30,59	-10,79	2,35	0	2	1	0	2,5
0	0	-4,3	-5,75	0	0	2,15	0
1,75	-2	0	0	-5,85	-3,5	-2	-7
3,7	-3,75	2,95	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1,5	-1,5
0	4,25	0	0	0	0	-2	-3

9,9	9,9	2,35	0	2	1	0	2,5
20,69	20,69	-4,3	-5,75	0	0	2,15	0
1,75	-2	0	0	-5,85	-3,5	-2	-7
3,7	-3,75	2,95	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1,5	-1,5
0	4,25	0	0	0	0	-2	-3

7	5,25	3,95	5,95	2	1	0	2,5
4,65	2,9	3,96	5,95	0	0	2,15	0
11,52	4,87	5,6	9,35	-5,85	-3,5	-2	-7
12,87	12,12	11,35	15,07	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1,5	-1,5
0	4,25	0	0	0	0	-2	-3

4,5	4,5	2,63	2,63	2	2	4,23	4,23
2,5	2,5	2,63	2,63	2	2	1,73	1,73
2,33	2,33	1,45	1,45	3,05	3,05	2,98	2,98
2,33	2,33	1,45	1,45	0,9	0,9	2,98	2,98
2,84	2,84	0,69	0,69	2,55	1,05	0,43	1,93
8,69	8,69	4,19	4,19	3,05	4,55	8,93	7,43
6,44	6,44	8,19	3,94	4,68	6,68	6,04	9,04
6,44	6,44	8,19	3,94	6,68	4,68	9,04	6,04

