Spieltheorie

Internationales Mathematikturnier 2024
Vorbereitungsmaterial

20. September 2024

Wir danken allen Förderern des Turniers.

Inhaltsverzeichnis

1 Spiele **5**
- 1.1 Was ist ein Spiel? . . . 5
- 1.2 Matrizen . . . 6
- 1.3 Spiele als Matrizen . . . 6
- 1.4 Nullsummenspiele . . . 7
- 1.5 Strategien . . . 8
- 1.6 Erwartungswert . . . 9

2 Die beste Strategie wählen **10**
- 2.1 Reine Maximin- und Minimax-Strategien . . . 10
- 2.2 Gemischte Maximin- und Minimax-Strategien . . . 12
- 2.3 Gemischte Maximin- und Minimax-Strategien finden . . . 13
- 2.4 Anwendung: Elfmeter . . . 14
- 2.5 Strikt dominierte Aktionen . . . 15
- 2.6 Strikt dominante Aktionen . . . 17
- 2.7 Aktionen dominiert durch Strategien . . . 17

3 Das Nash-Gleichgewicht **19**
- 3.1 Beste Reaktionen . . . 19
- 3.2 Reine Nash-Gleichgewichte . . . 20
- 3.3 Gemischte Nash-Gleichgewichte . . . 21
- 3.4 Anwendung: Habicht-Taube . . . 23

4 Abwechselnd spielen **24**
- 4.1 Spiele in der extensiven Form . . . 24
- 4.2 Rückwärtsgerichtete Induktion . . . 26
- 4.3 Die strategische Form . . . 29
- 4.4 Beispiel: Triell . . . 30

5 Antworten **33**

Einleitung

Liebe Teilnehmer*innen des Mathematikturniers 2024,

in ein paar Wochen ist es so weit, und ihr könnt am Mathematikturnier teilnehmen. Die erste Runde dieses Turniers heißt „Sum of Us“. Diese Runde behandelt jedes Jahr ein anderes mathematisches Thema. Hierauf könnt ihr euch mit dem Übungsmaterial dieses Dokuments vorbereiten. Eure Lehrkräfte sind bestimmt bereit, euch hierbei zu helfen!

Dieses Jahr steht das Thema **Spieltheorie** im Mittelpunkt. Vielleicht denkt ihr bei Spieltheorie jetzt direkt an Monopoly, Risiko oder Die Siedler. Spieltheorie kann sicher auch auf solche Spiele angewandt werden, aber sie bietet viel mehr als das. Jede Situation, in der mehrere Spieler eine Entscheidung treffen müssen, die Einfluss auf andere Spieler hat, kann mit der Spieltheorie betrachtet werden. Spieler können hier Menschen sein, aber auch Tiere, Betriebe, Länder und viele andere Dinge.

Eine der Anwendungen der Spieltheorie, die wir behandeln werden, ist das Schießen von Elfmetern, wobei der Torwart eine Seite wählen muss, die er verteidigen will und der Feldspieler eine Seite wählen muss, in deren Richtung er schießen will. Eine andere Anwendung der Spieltheorie ist die Evolutionstheorie, wobei sie benutzt werden kann, um zu betrachten, ob bestimmte Eigenschaften gut oder eher schlecht für ihre Art sind. Dies sind nur zwei Beispiele von Situationen, in denen die Spieltheorie angewendet werden kann.

Inzwischen haben bereits 15 Spieltheorie-Forschende den Nobelpreis der Ökonomie gewonnen. In der Mathematik ist die Spieltheorie gut bekannt, aber außerhalb der Mathematik kennen die meisten Menschen sie nicht wirklich. Deshalb freut es uns, euch dieses Fachgebiet etwas näher bringen zu dürfen!

Ein mathematischer Begriff, dem ihr das erste Mal begegnet, ist oft schwer direkt zu durchschauen. In Beispielen seht ihr meistens besser, was ihr euch unter so einem Begriff vorstellen könnt. Darum geben wir euch in diesem Dokument viele Beispiele von allerlei Begriffen. Wir raten euch, den Fokus hierauf zu legen: wenn ihr die Beispiele eines Begriffes versteht, habt ihr wahrscheinlich auch verstanden, wie ihr mit diesem Begriff arbeiten könnt. Noch wichtiger ist es, danach auch die Übungsaufgaben zu machen. Diese stehen im Dokument zwischen den Ausführungen, und am Ende befinden sich die Lösungen.

Die Unterlagen wurden unter Begleitung von Peter Hochs und Sep Thijssen von zwei Mathematikstudierenden der Radboud Universiteit, Jimme Bergfeld und Gwen Bleckmann, geschrieben.

Die Organisationsteams,
Stefan Hartmann & Rainer Kaenders (Universität Bonn)
Michael Gruber, Thorsten Holm, Florian Leydecker & Víctor González Alonso (Leibniz Universität Hannover)
Niels Bonneux & Joeri Van der Veken (KU Leuven)
Peter Hochs & Sep Thijssen (Radboud Universiteit Nijmegen)

Kapitel 1

Spiele

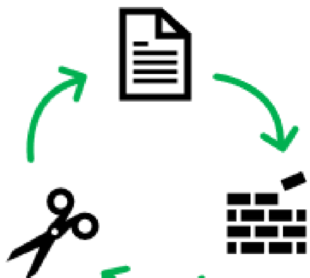
Wir beginnen mit der Basis der Spieltheorie: Was ist ein Spiel und wie können wir es mathematisch beschreiben? Zur Beschreibung verwenden wir meistens eine **Matrix**: Eine Tabelle, in der die möglichen Ergebnisse eines Spiels auf eine praktische Art zusammengefasst sind. Wir betrachten auch **Strategien**: Herangehensweisen, mit denen die Spieler[1] wählen, welche Aktionen sie während des Spiels ausführen.

1.1 Was ist ein Spiel?

Ein Spiel ist eine Interaktion zwischen Spielern, wobei alle Spieler eine Anzahl möglicher Aktionen haben. Die Anzahl der Spieler kann bei jedem Spiel unterschiedlich sein. In diesem Dokument legen wir den Fokus vor allem auf Spiele für zwei Spieler und am Ende einmal auf ein Spiel für drei Spieler. Es muss aber auch dann nur auf einen möglichen Gegenspieler geachtet werden.

Bei einem Spiel treffen alle Spieler eine Entscheidung und diese Entscheidung nennen wir eine Aktion. Die Spieler wissen voneinander nicht, was sie wählen: sie wählen also immer gleichzeitig. Wenn beide Spieler ihre Aktion gewählt haben, führt das zu einem Ergebnis für beide Spieler, das wir oft als Gewinn oder Verlust beschreiben können. Um mathematisch über das Ergebnis sprechen zu können, geben wir es für beide Spieler in Zahlen an. Wir können einem Spieler zum Beispiel bei einem Gewinn 1 Punkt geben und -1 Punkt bei einem Verlust. Oder, wenn um Geld gespielt wird, kann das Ergebnis ein Geldbetrag sein, den ein Spieler gewinnt oder verliert.

Beispiel 1.1. Filip und Tijn spielen das Spiel „Schere, Stein, Papier". In diesem Spiel wählen sie gleichzeitig, ob sie „Schere", „Stein" oder „Papier" spielen. „Schere" gewinnt über „Papier", „Papier" über „Stein" und „Stein" über „Schere". Wenn beide dasselbe spielen, zählt das als Unentschieden.



Die Anzahl der Spieler ist hier zwei. Die Aktionen, die die Spieler ausführen können, sind die Entscheidungen, „Schere", „Stein" oder „Papier" zu spielen. Wenn beide die Wahl getroffen haben, liegt das Ergebnis schon fest. Nach dem Spiel wissen sie, wer gewonnen hat oder ob es ein Unentschieden war. Um hiermit rechnen zu können, geben wir Gewinnen einen Wert von 1, Verlusten einen Wert von -1 und einem Unentschieden den Wert 0. Wenn Filip also die Aktion „Stein" und Tijn die Aktion „Papier" wählt, dann ist das Ergebnis des Spiels -1 für Filip und 1 für Tijn.

[1]Wir bezeichnen mit dem Begriff „Spieler" die am Spiel Teilnehmenden; dies können Personen beliebigen Geschlechts sein, aber auch Tiere, Betriebe, Länder.

1.2 Matrizen

Um Spiele zu studieren, müssen wir sie mathematisch beschreiben können. Das machen wir in der Spieltheorie meistens mit Hilfe einer Matrix.

> Eine **Matrix** ist eine Tabelle mit runden Klammern außen, in der Zahlen stehen.

Beispiel 1.2. Eine Matrix kann zum Beispiel so aussehen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

> Zahlen, die übereinander stehen, bilden zusammen eine **Spalte**, und Zahlen, die nebeneinander stehen, eine **Zeile**.

In der Matrix im Beispiel 1.2 ist die erste Spalte also $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, und die erste Zeile ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Die Matrix in diesem Beispiel hat 2 Zeilen und 2 Spalten und heißt deshalb eine 2×2-Matrix. Die Zahlen in einer Matrix sind beliebig und die Anzahl der Zeilen und Spalten muss nicht gleich sein.

Beispiel 1.3. Das ist eine 2×3-Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$. Sie hat zwei Zeilen und jede Zeile besteht aus drei Zahlen, und sie hat drei Spalten und jede Spalte besteht aus zwei Zahlen.

Aufgabe 1.4. Welche Zahl steht in Zeile 1 und Spalte 2 dieser Matrix?

1.3 Spiele als Matrizen

Wir werden oft ein Spiel für zwei Spieler in einer Matrix repräsentieren.

> Wenn wir ein Spiel für zwei Spieler in einer Matrix wiedergeben, dann repräsentiert jede **Zeile** eine mögliche Aktion von **Spieler 1** und jede **Spalte** eine mögliche Aktion von **Spieler 2**.

Wir können für beide Spieler einzelne Matrizen aufstellen mit den Ergebnissen für die Spieler. Alternativ können wir die Ergebnisse für beide Spieler auch zusammensetzen in eine Matrix mit zwei Zahlen auf jeder Position: das Ergebnis von Spieler 1 und das Ergebnis für Spieler 2. Das heißt eine **Bimatrix**. Das ist am einfachsten an einem Beispiel zu sehen, siehe Beispiel 1.5.

Wenn wir ein Spiel für zwei Spieler in einer Matrix wiedergeben, dann heißt der erste Spieler der **Zeilenspieler** und der zweite Spieler der **Spaltenspieler**. Die Aktionen des ersten Spielers sind nämlich die der Zeilen und die des zweiten Spielers die der Spalten.

Beispiel 1.5. Wir können das Spiel „Schere, Stein, Papier“ aus Beispiel 1.1 wie folgt in einer Matrix aufschreiben. Filip ist der Zeilenspieler und Tijn der Spaltenspieler. Die Matrix für Filip ist:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Schere} & \text{Stein} & \text{Papier} \end{array} \\ \begin{array}{r} \underline{\text{Schere}} \\ \underline{\text{Stein}} \\ \underline{\text{Papier}} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Filip wählt als Zeilenspieler zwischen den rot unterstrichenen Worten und Tijn wählt eine der Spalten. Der Gewinn, den Filip bekommt, steht dann in der Zeile, die er selbst gewählt hat und der Spalte, die Tijn gewählt hat.

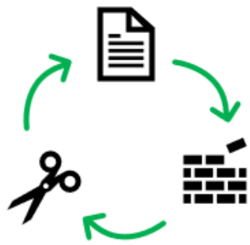
Für Tijn können wir auch eine Matrix mit seinem Gewinn aufschreiben:

$$\begin{array}{r} \\ \text{Schere} \\ \text{Stein} \\ \text{Papier} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{\text{Schere}} & \underline{\text{Stein}} & \underline{\text{Papier}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & {\color{blue}1} & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Tijn wählt als Spaltenspieler eine der blau unterstrichenen Wörter und Filip eine der Zeilen.

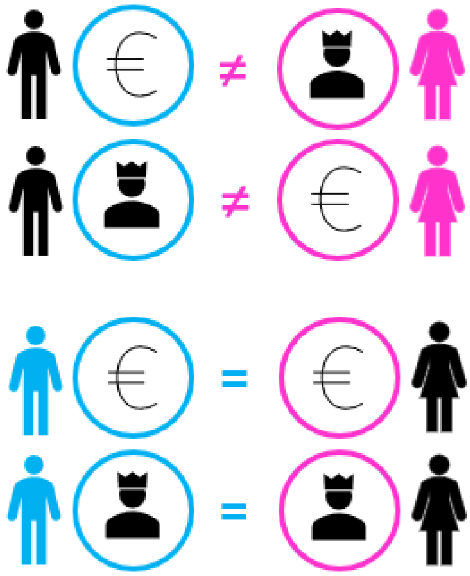
Um nicht jedes Mal zwei Matrizen aufschreiben zu müssen, können wir sie zu einer Bimatrix zusammenfügen. Diese enthält dann an jeder Stelle genau zwei Zahlen; eine für den Zeilenspieler und eine für den Spaltenspieler. Der Gewinn des Zeilenspielers (in diesem Fall Filip) steht links vom Semikolon und der Gewinn des Spaltenspielers (in diesem Fall Tijn) steht rechts vom Semikolon.

$$\begin{array}{r} \\ {\color{red}\text{Schere}} \\ \text{Stein} \\ \text{Papier} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Schere} & {\color{blue}\text{Stein}} & \text{Papier} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0;0 & {\color{red}-1};{\color{blue}1} & 1;-1 \\ 1;-1 & 0;0 & -1;1 \\ -1;1 & 1;-1 & 0;0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Wenn Filip „Schere“ und Tijn „Stein“ spielt, dann verliert Filip (-1) und Tijn gewinnt (1). Dieses Ergebnis des Spiels steht in der ersten Zeile und der zweiten Spalte ($-1; 1$).

Beispiel 1.6. Jetzt betrachten wir das Spiel „Matching Pennies“. In diesem Spiel bekommen beide Spieler eine Münze und sie beschließen gleichzeitig, entweder Kopf oder Zahl nach oben zu legen. Wenn beide Spieler die gleiche Entscheidung treffen, gewinnt Spieler 1 und ansonsten gewinnt Spieler 2. In einer Bimatrix sieht das wie folgt aus:



$$\begin{array}{r} \\ \text{Kopf} \\ \text{Zahl} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Kopf} & \text{Zahl} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1; -1 & -1; 1 \\ -1; 1 & 1; -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 1.7. Wir können das Spiel „Matching Pennies“ anpassen, indem wir beiden Spielern auch die Option geben, ihre Münze auf die Seite zu legen. Spieler 1 gewinnt immer noch, wenn beide Spieler dieselbe Option wählen und verliert ansonsten. Wie sieht die Bimatrix dieses Spiels aus?

1.4 Nullsummenspiele

> Ein **Nullsummenspiel** (zero-sum game) ist eine Spielform, bei der der Gewinn von allen Spielern zusammengezählt 0 ergibt. Der Gewinn eines Spielers kann hierbei sowohl eine positive als auch eine negative Zahl sein – wir beschreiben also einen Verlust als einen negativen Gewinn.

Jeder Gewinn, den ihr bekommt, bedeutet also die gleiche Menge Verlust für eure Gegenspieler. Das ist bei vielen Spielen, wie zum Beispiel Schach, Poker, Mühle, aber auch bei „Schere, Stein, Papier“ und Matching Pennies der Fall. Wenn ein Spieler bei Matching Pennies gewinnt und ein Spieler verliert, dann ist die Summe der Gewinne der Spieler ${\color{green}1} + {\color{red}(-1)} = 0$.

Ein Nullsummenspiel kann auch in einer Bimatrixform aufgeschrieben werden, wobei der erste Wert der Gewinn für Spieler 1 ist und der zweite Wert der Gewinn für Spieler 2. Ein Beispiel für ein Nullsummenspiel in Bimatrixform ist:

$$\begin{pmatrix} 1; -1 & 0; 0 & -2; 2 \\ -4; 4 & 9; -9 & 4; -4 \end{pmatrix}$$

> Bei einem Nullsummenspiel ist die Summe der Werte an einer Stelle der Matrix immer gleich 0. Dadurch ist es ausreichend, den Gewinn von **Spieler 1** aufzuschreiben, da dies immer gleich dem negativen Gewinn von Spieler 2 ist. Deshalb benutzen wir für ein Nullsummenspiel meistens eine gewöhnliche Matrix anstelle einer Bimatrix: die Matrix mit den Ergebnissen für Spieler 1.

Unten steht dasselbe Nullsummenspiel in gewöhnlicher Matrixform. Hier ist zum Beispiel in der zweiten Zeile und dritten Spalte der Gewinn von Spieler 1 gleich 4. Weil es ein Nullsummenspiel ist, wissen wir dann schon, dass Spieler 2 einen Gewinn von -4 hat, und brauchen diesen nicht extra aufzuschreiben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -4 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Es gibt auch Spiele, die keine Nullsummenspiele sind. Bei Fußballspielen bekommt der Gewinner 3 Punkte, der Verlierer 0 Punkte und bei einem Unentschieden bekommen beide 1 Punkt. Also ist die Summe der Gewinne nach einem gespielten Spiel gleich 2 oder 3.

Aufgabe 1.8. Jasper (Spieler 1) und Annet (Spieler 2) spielen ein Spiel, bei dem sie beide eine der Zahlen 0, 2 oder 4 wählen. Wenn Jasper die Zahl j gewählt hat und Annet die Zahl a, dann gibt Jasper $j + a$ Euro an Annet und danach gibt Annet $j \cdot a$ Euro an Jasper. Erklärt, warum das ein Nullsummenspiel ist, und gebt die dazugehörige (gewöhnliche) Matrix an.

1.5 Strategien

Der Vorteil davon, Spiele in einer Matrix oder Bimatrix aufzuschreiben, ist, dass man Informationen schnell ablesen kann. Weil die Informationen in einer Matrix stehen, können auch einige Rechnungen damit durchgeführt werden, die dabei helfen, die beste Strategie zu finden.

> In jedem Spiel haben die Spieler eine Anzahl möglicher **Aktionen**. Das sind die Entscheidungen, die sie treffen können.

Wir haben gesehen, dass in dem Spiel „Schere, Stein, Papier“ die möglichen Aktionen beider Spieler „Schere“, „Stein“ und „Papier“ sind. In der Spieltheorie wählen Spieler meistens nicht direkt, welche Aktionen sie spielen, sondern wählen, mit welcher **Wahrscheinlichkeit** sie jede Aktion spielen.

> Eine **Strategie** eines Spielers gibt für jede Aktion des Spielers an, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Aktion gespielt wird.

Die Strategie wird als eine Zeile von Zahlen mit runden Klammern um die Zeile aufgeschrieben (eine Matrix mit einer Zeile). Die Anzahl der Zahlen ist gleich der Anzahl der Aktionen, und an jeder Stelle der Zeile steht die Wahrscheinlichkeit, die zugehörige Aktion zu wählen.

Eine Wahrscheinlichkeit ist eine Zahl zwischen 0 und 1. Sie ist 0, wenn das zugehörige Ereignis nie passiert und 1, wenn es immer passiert. Die Zeile von Zahlen einer Strategie muss addiert immer 1 sein, weil immer genau eine Aktion gespielt wird.

Die Strategie, zufällig zwischen „Schere“, „Stein“ und „Papier“ zu wählen, wird so aufgeschrieben: $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, und die Strategie, zufällig zwischen „Schere“ und „Stein“ zu wählen, aber nie „Papier“ zu spielen so: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Im Spiel „Matching Pennies“ wird die Strategie „Ich spiele immer Zahl“ so aufgeschrieben: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Eine Strategie, bei der immer dieselbe Aktion gewählt wird (z. B. $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$) heißt eine **reine Strategie**. Bei einer reinen Strategie ist genau eine von den Wahrscheinlichkeiten 1 und alle anderen Wahrscheinlichkeiten sind 0. Eine Strategie, die nicht rein ist, heißt **gemischt**.

Wenn wir noch nicht wissen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Spieler eine Aktion spielt, können wir hierfür Variablen benutzen. Wenn Spieler 1 zum Beispiel drei mögliche Aktionen hat und wir wissen noch nicht, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Aktionen gespielt werden, können wir die Strategie von Spieler 1 schreiben als $\begin{pmatrix}p & q & r\end{pmatrix}$, wobei p, q und r Zahlen zwischen 0 und 1 sind mit $p+q+r=1$. Wenn Spieler 2 zwei mögliche Aktionen hat, schreiben wir die Strategie von Spieler 2 im allgemeinen zum Beispiel so: $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}$ mit $x+y=1$, und auch hier müssen x und y zwischen 0 und 1 liegen.

1.6 Erwartungswert

Wenn beide Spieler eine Strategie gewählt haben, dann hat jedes Ergebnis eines Spiels eine bestimmte Wahrscheinlichkeit. Dann steht das Ergebnis des Spiels zwar nicht fest, aber wir kennen die **Wahrscheinlichkeit** jedes möglichen Ergebnisses.

Es ist interessant zu wissen, was das gemittelte Ergebnis eines Spiels ist, wenn dieses oft wiederholt wird. Den Begriff, den wir hierfür verwenden, ist der **Erwartungswert** oder auch der **erwartete Gewinn**. Der Erwartungswert kann berechnet werden, indem man die Summe aller Ergebnisse, gewichtet mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, ausrechnet.

Beispiel 1.9. Nehmt an, dass beide Spieler bei „Matching Pennies“ immer Kopf spielen. Das heißt, dass beide die reine Strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ spielen. Dann ist der Erwartungswert des Gewinns von Spieler 1 gleich 1, weil beide Münzen immer mit der gleichen Seite oben liegen: das heißt, Spieler 1 gewinnt immer. Wenn Spieler 1 immer Kopf spielt (Strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$) und Spieler 2 immer Zahl (Strategie $\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}$), dann ist der Erwartungswert von Spieler 1 gleich -1, weil dann immer zwei verschiedene Seiten oben liegen. Wenn Spieler 1 und 2 beide die Strategie $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ spielen, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler Kopf spielen: $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$ und dass beide Spieler Zahl spielen $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 einen Punkt bekommt, finden wir, indem wir die Wahrscheinlichkeiten der Möglichkeiten, einen Punkt zu bekommen, addieren. Wir addieren also die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler Kopf spielen und die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler Zahl spielen, also $\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 einen Punkt verliert, gleich $1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$.

Jetzt kennen wir alle relevanten Wahrscheinlichkeiten und können den Erwartungswert berechnen. Wir nehmen die Summe der möglichen Ergebnisse (also 1 und -1) und gewichten diese mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ($\frac{5}{9}$ und $\frac{4}{9}$). Also ist

$$\text{„Erwartungswert von Spieler 1“} = 1\cdot\frac{5}{9}+(-1)\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}.$$

Aufgabe 1.10. Wenn Gerbrich in „Schere, Stein, Papier“ die Strategie $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$ spielt und Madelon $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$, was ist dann der erwartete Gewinn von Madelon? Argumentiert dann ohne weitere Berechnung, was der Erwartungswert für Gerbrich ist.

Kapitel 2

Die beste Strategie wählen

Bei jedem Spiel ist es eine wichtige Frage, welche Strategie ein Spieler am besten wählen kann. Hierbei sind verschiedene Antworten möglich, abhängig davon, was man „am besten“ findet. Wollt ihr zum Beispiel dafür sorgen, dass ihr sicher wisst, dass ihr mindestens einen bestimmten Gewinn erhaltet? Oder findet ihr es wichtiger, dafür zu sorgen, dass ihr maximal einen bestimmten Verlust erleidet? Es ist auch wichtig zu wissen, wann eine Aktion sicher einen höheren Gewinn bringt als eine andere Aktion, unabhängig davon, was der andere Spieler unternimmt. Dann sagen wir, dass eine Aktion eine andere **dominiert**. Ein intelligenter Spieler wird eine dominierte Aktion dann nie ausführen. Hierauf zu achten, kann es einfacher machen, die beste Strategie zu wählen.

2.1 Reine Maximin- und Minimax-Strategien

Zwei Strategien, die für die Spieler eines Spiels interessant sein können, sind die Maximin-Strategie und die Minimax-Strategie. In einem Nullsummenspiel kann Spieler 1 eine Maximin-Strategie spielen und Spieler 2 eine Minimax-Strategie.

Lasst uns mit der etwas simpleren Version beginnen, den **reinen** Maximin- und Minimax-Strategien. Wie bereits in Abschnitt 1.5 erwähnt, ist eine reine Strategie eine Strategie, bei der immer dieselbe Aktion gespielt wird.

> Die **reine Maximin-Strategie** von Spieler 1 ist diejenige reine Strategie, die für das Maximieren seines minimalen Gewinns sorgt.

Was heißt das Maximieren des minimalen Gewinns von Spieler 1 konkret? Wir betrachten jetzt reine Strategien, bei denen Spieler 1 immer dieselbe Aktion spielt. Nehmt an, dass Spieler 1 die reine Strategie wählt, bei der immer die Aktion a gewählt wird. Jede Aktion b von Spieler 2 ergibt dann für Spieler 1 einen bestimmten Gewinn. Im schlechtesten Fall für Spieler 1 wählt Spieler 2 die Aktion b so, dass der Gewinn für Spieler 1 kleinstmöglich ist. Diesen kleinstmöglichen Gewinn nennen wir den minimalen Gewinn, wenn Spieler 1 Aktion a spielt. Dieser kann für jede Aktion a von Spieler 1 unterschiedlich sein. Das Maximieren des minimalen Gewinns von Spieler 1 heißt jetzt also, dass Spieler 1 die Aktion a wählt, für die der minimale Gewinn so groß wie möglich ist. Das scheint jetzt eventuell etwas abstrakt, wird aber in Beispiel 2.1 hoffentlich etwas veranschaulicht.

> Die **reine Minimax-Strategie** von Spieler 2 ist diejenige reine Strategie, die für das Minimieren seines maximalen Verlusts sorgt.

Indem diese Strategie gespielt wird, sorgt Spieler 2 dafür, dass sein maximaler Verlust so klein wie möglich ist. Spieler 2 betrachtet den größtmöglichen Verlust, der durch jede seiner Aktionen für ihn ausgelöst werden kann. Folglich begrenzt Spieler 2 seinen Verlust, indem er die Aktion mit dem niedrigsten höchsten Verlust wählt. Es hängt jetzt noch von Spieler 1 ab, ob Spieler 2 tatsächlich den höchsten Verlust erleidet, weniger verliert oder sogar etwas gewinnt.

Beispiel 2.1. Reine Maximin-Strategie

Wir betrachten ein Nullsummenspiel, das durch folgende Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & -2 & 6 \\ 2 & -8 & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen in der Matrix sind der Gewinn von Harm (Spieler 1) und der Verlust von Inge (Spieler 2). Harm wählt die Zeile und Inge die Spalte.

Wir wollen die reine Maximin-Strategie für Harm bestimmen. Das machen wir, indem wir in jeder Zeile nach dem minimalen Gewinn für Harm schauen. In der folgenden Matrix haben wir diese Werte rot markiert.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{-2} & 7 & 1 & 8 \\ 5 & 9 & \color{red}{-2} & 6 \\ 2 & \color{red}{-8} & -4 & 5 \\ 9 & 7 & 9 & \color{red}{3} \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass Harm jeweils minimal -2, -8 oder 3 gewinnt. Das Maximum von -2, -8 und 3 ist 3, und die maximale 3 kommt aus Zeile 4. Also ist die reine Maximin-Strategie für Harm, immer die zu Zeile 4 gehörige Aktion zu spielen. Wir sagen auch: „Die reine Maximin-Strategie für Harm ist Zeile 4“.

Reine Minimax-Strategie

Weil das ein Nullsummenspiel ist, ist der Verlust von Inge genau der Gewinn von Harm. Für die reine Minimax-Strategie betrachtet Inge pro Spalte, was der maximale Gewinn von Harm, also ihr maximaler Verlust, sein kann. In der unten stehenden Matrix sind pro Spalte die höchsten Werte rot markiert.

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 1 & \color{red}{8} \\ 5 & \color{red}{9} & -2 & 6 \\ 2 & -8 & -4 & 5 \\ \color{red}{9} & 7 & \color{red}{9} & 3 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt nach dem Minimum von 9, 9, 9 und 8 schauen, ist das 8. Die reine Minimax-Strategie für Inge ist es also, immer die Aktion zu spielen, die zu Spalte 4 gehört.

Wenn Inge diese Strategie spielt, gewinnt Harm (und verliert Inge) maximal das Minimum der vier maximalen Ergebnisse, also 8. Im Beispiel konnte Inge maximal 9 verlieren, wenn sie eine der Spalten 1 bis 3 gespielt hätte, aber indem sie Spalte 4 wählt, sorgt sie dafür, dass ihr Verlust maximal 8 beträgt. Wenn Harm eine andere Zeile als Zeile 1 spielt, wird Inges Verlust beim Spielen von Spalte 4 nur 3, 5 oder 6.

Harms reine Maximin-Strategie von Zeile 4 garantiert ihm mindestens einen Gewinn von 3. Mit ihrer reinen Minimax-Strategie von Spalte 4 garantiert Inge sich maximal einen Verlust von 8. Wir sehen also auch, dass diese garantierten Werte nicht gleich sein müssen.

Aufgabe 2.2. Wir betrachten ein Nullsummenspiel zwischen zwei Spielern, das mit dieser Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme die reine Maximin-Strategie für Spieler 1 und die reine Minimax-Strategie für Spieler 2.

2.2 Gemischte Maximin- und Minimax-Strategien

Wir betrachten jetzt Maximin- und Minimax-Strategien, die nicht rein sein müssen, also auch gemischt sein dürfen. Das heißt, dass nicht feststeht, welche Aktion ein Spieler spielt, sondern nur, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Aktion gespielt wird.

Wenn Spieler 1 eine Strategie gewählt hat, dann können wir für jede Aktion von Spieler 2 einen erwarteten Gewinn für eine Strategie von Spieler 1 ausrechnen. Der schlechteste Fall für Spieler 1 ist es, wenn Spieler 2 die Aktion spielt, bei der der erwartete Gewinn der niedrigste ist. Dann nennen wir den erwarteten Gewinn den **minimalen erwarteten Gewinn** bei der von Spieler 1 gewählten Strategie.

Die Strategie von Spieler 1[1], bei der der niedrigste dieser erwarteten Gewinne der höchste ist, heißt die Maximin-Strategie.

> Eine **Maximin-Strategie** von Spieler 1 maximiert den minimalen erwarteten Gewinn von Spieler 1.

Analog zur Maximin-Strategie von Spieler 1 kann Spieler 2 eine Minimax-Strategie spielen, bei der sein maximaler zu erwartender Verlust so niedrig wie möglich ist.

> Eine **Minimax-Strategie** von Spieler 2 minimiert den maximalen zu erwartenden Verlust von Spieler 2.

In Paragraph 2.3 werden wir sehen, wie man in manchen Fällen die Maximin-Strategie von Spieler 1 und die Minimax-Strategie von Spieler 2 bestimmen kann.

Beispiel 2.3. Wir betrachten das Spiel „Matching Pennies“ aus Beispiel 1.6. Erst bestimmen wir den erwarteten Gewinn, wenn Spieler 1 die Strategie $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$ spielt, also immer „Kopf“ nach oben legt. Wenn Spieler 2 jetzt „Kopf“ spielt, ist der erwartete Gewinn von Spieler 1 gleich 1, ansonsten -1. Der minimale erwartete Gewinn ist dann das Minimum dieser zwei Zahlen, also -1. Wir können zeigen, dass das keine Maximin-Strategie ist, indem wir eine Strategie mit einem höheren zu erwartenden minimalen Gewinn finden. Spieler 1 kann zum Beispiel auch die Strategie $\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ spielen. Hierbei ist der erwartete Gewinn, wenn Spieler 2 „Kopf“ spielt gleich $1\cdot\frac{2}{3}+(-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ und gleich $1\cdot\frac{1}{3}+(-1)\cdot\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$ wenn Spieler 2 „Zahl“ spielt. (Das ist immer 1 mal die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinn von 1 plus -1 mal die Wahrscheinlichkeit auf einen Gewinn von -1.) Bei dieser Strategie ist der minimale erwartete Gewinn also $-\frac{1}{3}$.

Aufgabe 2.4. Überlegt euch, was bei „Matching Pennies“ die Maximin-Strategie für Spieler 1 ist.

Das Maximieren des minimalen erwarteten Gewinns klingt vielleicht nicht nach der optimalen Art, um ein Spiel zu spielen. Könntet ihr nicht viel mehr verdienen, wenn ihr ein höheres Risiko nehmt? Diese Frage wird durch einen mathematischen Satz beantwortet, der als Startpunkt der Spieltheorie betrachtet wird.

> Bei einem Spiel mit zwei Spielern sind die folgenden Zahlen gleich:
>
> - der minimale erwartete Gewinn, den Spieler 1 bei Spielen einer Maximin-Strategie bekommt,
> - der maximale zu erwartende Verlust, den Spieler 2 erleidet, wenn er eine Minimax-Strategie spielt.
>
> Diese Zahl heißt der **Wert des Spiels**.

[1] Genauso könnten wir auch die Maximin-Strategie von Spieler 2 und die Minimax-Strategie von Spieler 1 untersuchen.

Dieser Satz wurde 1928 von John von Neumann bewiesen, einem ungarischen Mathematiker und Mitbegründer der Spieltheorie. Ein Beweis dieser Aussage würde den Rahmen dieser Ausarbeitung sprengen. Siehe zum Beispiel Theorem II.4.1 im Buch „Game theory“ von Guillermo Owen (dritte Auflage, Academic Press, 1995) für einen Beweis.

Wir werden diesen Satz im folgenden Paragraphen verwenden, um gemischte Maximin- und Minimax-Strategien zu finden. Dabei benutzen wir auch eine Folgerung aus diesem Satz.

Bei jedem Nullsummenspiel mit zwei Spielern gilt:

- Wenn Spieler 1 eine Maximin-Strategie spielt, dann ist mit **jeder** Strategie von Spieler 2 der erwartete Gewinn von Spieler 1 gleich dem Wert des Spiels.
- Wenn Spieler 2 eine Minimax-Strategie spielt, dann ist mit **jeder** Strategie von Spieler 1 der erwartete Verlust von Spieler 2 gleich dem Wert des Spiels.

2.3 Gemischte Maximin- und Minimax-Strategien finden

Im allgemeinen ist es nicht so einfach, eine gemischte Maximin- oder Minimax-Strategie zu finden. Aber es ist doch gut möglich, wenn Spieler 1 nur zwei mögliche Aktionen hat. Nehmt an, dass Sjoerd (Spieler 1) und Wouter (Spieler 2) ein Nullsummenspiel spielen, bei dem Spieler 1 zwei mögliche Aktionen hat. Dann hat die zugehörige Matrix zwei Zeilen und es gibt für Sjoerd (Spieler 1) eine einfache Möglichkeit, die Maximin-Strategie zu finden. Das ist meistens keine reine Strategie.

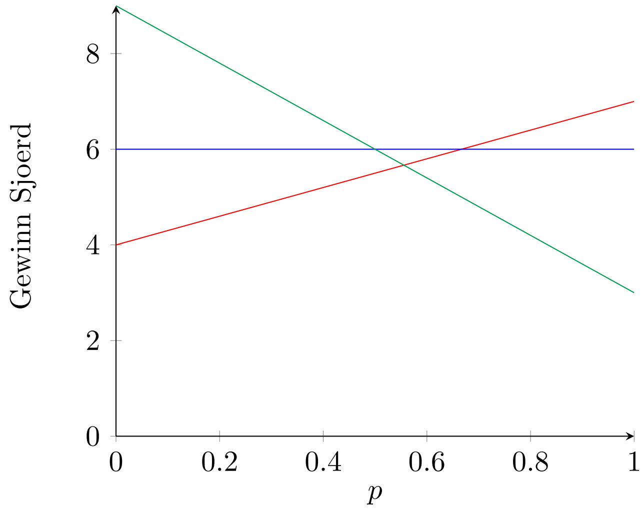
Betrachtet jetzt das Nullsummenspiel, das durch die folgende Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Für jede Spalte, die Wouter (Spieler 2) wählen kann, können wir den erwarteten Gewinn von Sjoerd abhängig von seiner Strategie aufschreiben. Sjoerd hat zwei mögliche Aktionen, also würden wir seine Strategien eigentlich so aufschreiben: $\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix}$. Aber weil $p + q = 1$ gelten muss, kann das auch als $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ aufgeschrieben werden. Diese Schreibweise ist später praktischer. Mit dieser Schreibweise können wir den erwarteten Gewinn von Sjoerd für jede Spalte, die Wouter wählen kann, aufschreiben. Das gibt uns die folgenden zu erwartenden Gewinne:

$$\begin{array}{ll} \text{Spalte 1} & 7p + 4(1-p) = 3p + 4, \\ \text{Spalte 2} & 6p + 6(1-p) = 6, \\ \text{Spalte 3} & 3p + 9(1-p) = 9 - 6p. \end{array}$$

Wenn Wouter Spalte 1 wählt, ist der erwartete Gewinn für Sjoerd gegeben durch $3p + 4$, wobei p die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sjoerd Zeile 1 wählt. Diese 3 Gewinnformeln können wir in eine Grafik zeichnen, mit p auf der x-Achse und dem erwarteten Gewinn von Sjoerd auf der y-Achse. Das sieht in diesem Fall dann so aus:



Wir suchen nach einer Strategie, die den minimalen erwarteten Gewinn maximiert, also derjenige Wert von p, bei dem die an dieser Stelle niedrigste Gerade in der Grafik so hoch wie möglich ist. In der Grafik können wir sehen, dass das bei dem Schnittpunkt der roten und grünen Gerade zutrifft. Diese gehören zu den Formeln „Gewinn $= 3p + 4$“ und „Gewinn $= 9 - 6p$“. Wenn wir die beiden Terme gleichsetzen, können wir p wie folgt finden:

$$\begin{aligned} & 3p + 4 = 9 - 6p \\ \Leftrightarrow \quad & 3p = 5 - 6p \\ \Leftrightarrow \quad & 9p = 5 \\ \Leftrightarrow \quad & p = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

Die Maximin-Strategie, die wir jetzt für Sjoerd gefunden haben, ist $\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$. Der minimale erwartete Gewinn, den Sjoerd hiermit verdient, ist der Wert des Spiels. Diesen Wert können wir finden, indem wir bei der Grafik oben wieder nach dem Punkt schauen, an dem die niedrigste Linie so hoch wie möglich ist. Wir wissen schon, dass der x -Wert dieses Punkts $\frac{5}{9}$ ist und, dass dieser Punkt der Schnittpunkt von $3p + 4$ und $9 - 6p$ ist. Indem wir $p = \frac{5}{9}$ in eine der zwei Formeln einsetzen, bestimmen wir den Wert des Spiels:

$$3 \cdot \frac{5}{9} + 4 = 9 - 6 \cdot \frac{5}{9} = \frac{17}{3}.$$

Nachdem wir jetzt den Wert des Spiels gefunden haben, können wir auch eine Minimax-Strategie für Wouter finden, weil der erwartete Verlust von Wouter bei einer Minimax-Strategie immer gleich dem Wert des Spiels ist. Wir schreiben die Strategie von Wouter jetzt als $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$. Aufgrund der Folgerung des Satzes von Neumann im vorherigen Abschnitt ist der erwartete Verlust von Wouter bei einer Minimax-Strategie für jede Strategie von Sjoerd gleich dem Wert des Spiels, also $\frac{17}{3}$. Wenn wir das auf die reine Strategie von Sjoerd anpassen, bei der er immer die erste oder immer die zweite Zeile spielt, dann finden wir

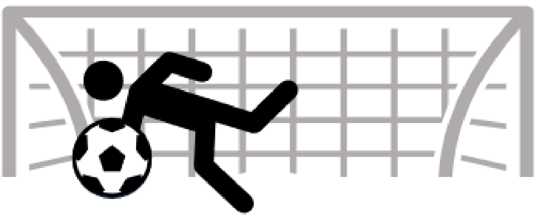
$$\begin{aligned} 7x + 6y + 3z &= \frac{17}{3}; \\ 4x + 6y + 9z &= \frac{17}{3}. \end{aligned}$$

Weil die gesamte Wahrscheinlichkeit auf alle möglichen Aktionen von Wouter 1 sein muss, gilt auch $x + y + z = 1$. Jetzt haben wir drei Gleichungen mit drei unbekannten Variablen.

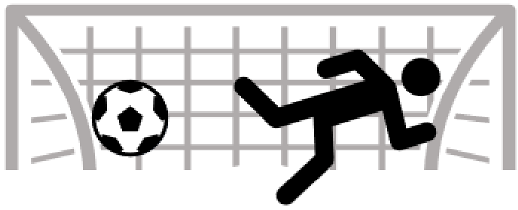
Aufgabe 2.5. Was sind x, y und z in der Minimax-Strategie von Wouter?

2.4 Anwendung: Elfmeter

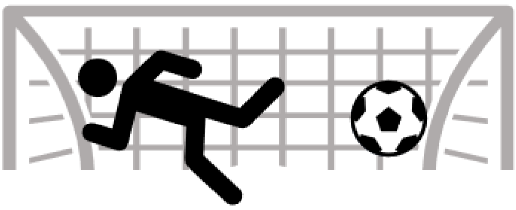
Manchmal werden bei Fußballspielen Elmeter aufs Tor geschossen. Hierbei können sowohl Jasper Cillessen (Torwart) als auch Lionel Messi (Feldspieler) entscheiden, ob sie nach links oder nach rechts schießen/verteidigen. Messi schießt mit seinem rechten Bein und deshalb ist es für ihn einfacher, auf die linke Seite des Tors zu schießen. Das nennen wir seine natürliche Seite. Wenn Messi die andere Seite wählt, nennen wir das die unnatürliche Seite. Cillessen weiß, welche Seite Messi lieber schießt und Messi weiß auch, dass Cillessen das weiß.



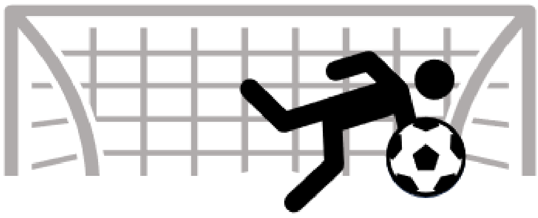
Messi schießt in Richtung der natürlichen Seite,
Cillessen verteidigt die natürliche Seite.
Wahrscheinlichkeit für ein Tor 70%.



Messi schießt in Richtung der natürlichen Seite,
Cillessen verteidigt die unnatürliche Seite.
Wahrscheinlichkeit für ein Tor 93%.



Messi schießt in Richtung der unnatürlichen Seite,
Cillessen verteidigt die natürliche Seite.
Wahrscheinlichkeit für ein Tor 95%.



Messi schießt in Richtung der unnatürlichen Seite,
Cillessen verteidigt die unnatürliche Seite.
Wahrscheinlichkeit für ein Tor 58%.

Die Prozentangaben unter den Bildern wurden nach einer Untersuchung von 1417 Elfmetern, die zwischen 1995 und 2000 gespielt wurden, festgestellt, wobei die Prozentangaben die Wahrscheinlichkeiten geben, mit denen der Feldspieler ein Tor schießt.

Wir modellieren das Schießen von Elfmetern als Nullsummenspiel, wobei der Gewinn für den Feldspieler Messi (Spieler 1) die Wahrscheinlichkeit ist, dass er ein Tor schießt. Das ist also gleich dem Verlust von Torwart Cillessen (Spieler 2).

Aufgabe 2.6. Gebt die Matrix an, die dieses Spiel beschreibt. Nehmt für beide Spieler die natürliche Seite als erste Aktion.

Aufgabe 2.7. Findet die Maximin-Strategie für den Feldspieler und die Minimax-Strategie für den Torwart.

In der Praxis scheint die Strategie der Feldspieler $\begin{pmatrix}0{,}60 & 0{,}40\end{pmatrix}$ zu sein, also schießen die Feldspieler in 40% der Fälle in Richtung ihrer unnatürlichen Seite. Die Strategie der Torwarte ist $\begin{pmatrix}0{,}58 & 0{,}42\end{pmatrix}$, wobei der Torwart also in 42% der Fälle die unnatürliche Seite verteidigt. Das liegt sehr dicht bei den Maximin- und Minimax-Strategien. Professionelle Fußballer halten sich also unbewusst sehr gut an die laut Spieltheorie optimalen Strategien.

2.5 Strikt dominierte Aktionen

In einem Spiel kann es vorkommen, dass eine Aktion immer schlechter ist als eine andere Aktion desselben Spielers. Deshalb wird der Spieler diese Aktion nie spielen. In so einem Fall nennen wir die Aktion strikt dominiert.

In der Matrix eines Nullsummenspiels ist eine Zeile **strikt dominiert**, wenn in einer anderen Zeile an jeder Stelle der Wert höher ist. Der Spaltenspieler will gerne einen niedrigeren Wert haben, deshalb ist eine Spalte strikt dominiert, wenn es eine andere Spalte gibt, die an jeder Stelle einen niedrigeren Wert hat.

Aufgabe 2.8. Eure Eltern wollen, dass ihr die Wäsche aufhängt und einkaufen geht, allerdings habt ihr selbst keine Lust darauf. Ihr sagt, dass ihr es schon machen könnt, aber nur, wenn ihr €10 als Belohnung bekommt. Eure Eltern kommen mit folgendem Spiel:


Wäsche aufhängen


Einkaufen gehen

$$\begin{pmatrix} \text{Wäsche aufhängen und €10} & \text{Einkaufen gehen} \\ \text{Wäsche aufhängen} & \text{Einkaufen gehen} \\ \text{Wäsche aufhängen und €5} & \text{Einkaufen gehen und €5} \end{pmatrix}$$

Ihr dürft die Zeile wählen und eure Eltern werfen eine Münze für die Spalte. Eure Zeile und die Spalte eurer Eltern ergeben die Aufgabe, die ihr ausführen müsst und eure Belohnung. Seht ihr, welche von euren Zeilen strikt dominiert wird und durch welche Zeile?

Eine strikt dominierte Zeile oder Spalte wird wahrscheinlich nie gespielt, und deshalb können wir sie auch **aus der Matrix weglassen**, ohne das Spiel zu verändern: ein intelligenter Spieler wird die zugehörige Aktion nie spielen.

Diese Regel können wir manchmal sogar mehrmals nacheinander benutzen, um die Matrix eines Spiels zu vereinfachen. Im folgenden Beispiel zeigen wir, wie das geht.

Beispiel 2.9. Lily und Paul spielen ein Nullsummenspiel gegeneinander, wobei Lily der Zeilenspieler und Paul der Spaltenspieler ist. Das Spiel wird durch diese Matrix beschrieben:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Unabhängig davon, welche Zeile Lily spielt, entsteht durch Spalte 3 für Paul immer der größte Verlust, deshalb wird Paul diese nie spielen. Das heißt, die dritte Spalte ist sowohl durch Spalte 1 als auch Spalte 2 strikt dominiert. Spalte 3 wird nie gespielt und deshalb können wir sie aus der Matrix weglassen.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \text{ weil } \begin{matrix} 4 < 6 \\ 1 < 5 \\ 3 < 7 \end{matrix}, \text{ aber auch } \begin{matrix} 2 < 6 \\ 3 < 5 \\ 1 < 7 \end{matrix}$$

Lily will immer den höchstmöglichen Gewinn bekommen. Deshalb wird sie nie Zeile 3 wählen, weil diese bei beiden Aktionen von Paul weniger Gewinn bringt als das Spielen von Zeile 1. Also ist Zeile 3 strikt durch Zeile 1 dominiert und die Matrix kann auch ohne Zeile 3 aufgeschrieben werden.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ weil } \begin{matrix} 4 > 3 \\ 2 > 1 \end{matrix}$$

Jetzt hat die Matrix keine strikt dominierten Zeilen und Spalten mehr, also kann die Matrix nicht weiter vereinfacht werden.

Wir stellen fest, dass es vorkommen kann, dass erst die strikt dominierte Zeile/Spalte entfernt werden muss, bevor die folgende entfernt werden kann. Im Beispiel muss erst Spalte 3 entfernt werden, bevor Zeile 3 entfernt werden kann. Zuerst wäre Zeile 3 nicht möglich gewesen, weil 7 nicht kleiner ist als 5 oder 6.

Eine Strategie für Spieler 1 können wir jetzt in der Form $\begin{pmatrix} p & q & 0 \end{pmatrix}$ aufschreiben und eine für Spieler 2 auch in der Form $\begin{pmatrix} r & s & 0 \end{pmatrix}$. Die letzte Zahl ist 0, weil diese Zeile/Spalte nie gespielt wird, weil sie strikt dominiert wird. Die Zahlen p und q, sowie auch die Zahlen r und s ergeben zusammen jeweils 1. Die vier Zahlen sind alle positiv oder 0.

2.6 Strikt dominante Aktionen

Eine **strikt dominante Aktion** ist eine Aktion, die immer das beste Ergebnis für einen Spieler ergibt, unabhängig davon, was sein Gegenspieler spielt. In der zugehörigen Zeile oder Spalte sind **alle** Werte höher/niedriger als an denselben Stellen der anderen Zeilen/Spalten. Dadurch kann es nur eine strikt dominante Aktion pro Spieler geben und es kann auch vorkommen, dass überhaupt keine strikt dominante Aktion in einem Spiel besteht.

Wenn Aktion 1 besser ist als Aktion 2 heißt das, dass Aktion 2 eine strikt dominierte Aktion ist, aber nicht automatisch, dass Aktion 1 strikt dominant ist. Eine strikt dominante Aktion ist besser als **alle** anderen Aktionen. Bei einer strikt dominierten Aktion ist eine andere Aktion besser als die strikt dominierte Aktion, aber diese andere Aktion ist nicht per se besser als alle anderen Aktionen und also nicht unbedingt eine strikt dominante Aktion.

Beispiel 2.10. Zwei Mitbewohner wollen ihre Wand streichen. Sie wählen beide zwischen zwei Farben und mischen ihre Wahlen, um die Wandfarbe zu bestimmen. Alec wählt zwischen Rot und Blau und Sterre wählt zwischen Rot und Gelb. Sie stellen fest, dass sie genau entgegengesetzte Meinungen haben. Alec will zum Beispiel am liebsten Orange und gibt dieser Farbe 4 Punkte, während Sterre Orange am hässlichsten findet und ihr -4 Punkte gibt. Unten stehende Matrix ist auf Basis von Alecs Meinung ausgefüllt. Weil Alec und Sterre genau entgegengesetzte Meinungen haben, ist dies ein Nullsummenspiel.

Rot + Rot = Rot   Rot + Gelb = Orange   Blau + Gelb = Grün   Blau + Rot = Lila

$$\begin{array}{c} \\ \text{Rot} \\ \text{Blau} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Rot} & \text{Gelb} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aus der Matrix kann abgelesen werden, dass Alec am liebsten die rote Aktion spielt; wenn Sterre Rot wählt, wählt Alec auch Rot und wenn Sterre Gelb wählt, wählt Alec wieder Rot, weil die Werte in der roten Zeile höher sind als in der blauen Zeile. Alec wird also nie Blau wählen. Deshalb ist die rote Aktion eine strikt dominante Aktion. Also ist auch direkt Alecs blaue Aktion durch die rote strikt dominiert.

Aufgabe 2.11. Hat Sterre in oben stehendem Beispiel auch eine strikt dominante Aktion? Warum?

2.7 Aktionen dominiert durch Strategien

Es kann auch vorkommen, dass eine Aktion, die nicht durch eine andere Aktion strikt dominiert wird, durch eine Kombination von anderen Aktionen dominiert wird.

Eine Aktion eines Spielers ist **strikt dominiert durch eine Strategie**, wenn die Strategie immer einen höheren zu erwartenden Gewinn hat als die Aktion. (Oder auch: als die reine Strategie, bei der immer diese Aktion gespielt wird.)

Wir erklären auch das anhand eines Beispiels. Achtet darauf, dass in einem Nullsummenspiel der Spaltenspieler immer ein niedriges Ergebnis des Spiels will, weil die Zahlen in der Matrix den Verlust des Spaltenspielers angeben.

Beispiel 2.12. Zwei Spieler spielen ein Nullsummenspiel, das durch diese Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Zur Verdeutlichung haben wir den Zahlen in der Matrix Farben gegeben. Später im Beispiel seht ihr, warum.

Wir werden probieren, für Spieler 1 eine Strategie zu finden, die eine Kombination aus der zweiten und dritten Zeile ist und bei jeder Aktion von Spieler 2 mehr Gewinn für Spieler 1 bringt als immer die erste Zeile zu spielen. Wenn wir so eine Strategie finden, können wir die erste Zeile aus der Matrix weglassen, ohne, dass das Spiel verändert wird. Denn dann ist es nie von Vorteil für Spieler 1, wenn er Zeile 1 spielt.

Die Strategie, die dann gespielt wird, ist $\begin{pmatrix} 0 & p & q \end{pmatrix}$. Das können wir auch als $\begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \end{pmatrix}$ aufschreiben, weil es dann nur noch zwei unbekannte Wahrscheinlichkeiten sind und diese zusammen 1 sein müssen. Eine Strategie, die die erste Zeile strikt dominiert, muss beim Spielen jeder Spalte einen höheren zu erwartenden Gewinn haben als der Gewinn der ersten Zeile.

Wir bekommen für jede Spalte eine Ungleichung. Wenn wir mit der Wahrscheinlichkeit p die zweite Zeile spielen und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ die dritte Zeile, dann sehen die Ungleichungen so aus:

$$\begin{aligned} 2p + 7(1-p) > 4 &\xrightarrow{\text{ausrechnen}} \quad p < \tfrac{3}{5} \\ 9p + 2(1-p) > 6 &\xrightarrow{\text{ausrechnen}} \quad p > \tfrac{4}{7} \\ 3p + 4(1-p) > 1 &\xrightarrow{\text{ausrechnen}} \quad p < 3 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung erfüllen wir bereits, weil $p \leq 1$, also bleibt noch:

$$\frac{40}{70} = \frac{4}{7} < p < \frac{3}{5} = \frac{42}{70}$$

Solange p zwischen diesen zwei Werten gewählt wird, ist die Strategie stärker als das Spielen von Zeile 1, und Zeile 1 ist durch die gemischte Strategie von Zeile 2 und 3 strikt dominiert. Die erste Zeile kann deshalb aus der Matrix entfernt werden, ohne, dass das Spiel verändert wird. Als mögliche Strategie kann jetzt zum Beispiel $p = \frac{41}{70}$ gewählt werden. Die Strategie von Spieler 1 ist dann $\begin{pmatrix} 0 & \frac{41}{70} & \frac{29}{70} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.13. Zwei Spieler spielen ein Nullsummenspiel, welches durch diese Matrix beschrieben wird:

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Finde alle Strategien für Spieler 2, die Kombinationen von Spalten 1 und 3 sind, die Spalte 2 strikt dominieren.

Kapitel 3

Das Nash-Gleichgewicht

Die Maximin- und Minimax-Strategien aus dem vorigen Kapitel können als optimale Strategien für beide Spieler betrachtet werden. Eine andere Kombination von Strategien, die als optimal angesehen werden können, ist das **Nash-Gleichgewicht**. Ein Nash-Gleichgewicht ist eine Situation, in der beide Spieler die bestmögliche Strategie gegen die Strategie ihres Gegenspielers spielen.

Das Nash-Gleichgewicht wurde 1950 durch den amerikanischen Mathematiker John Nash eingeführt. Nash gewann unter anderem hierfür den Nobelpreis der Ökonomie in 1994 gemeinsam mit John Harsanyi und Reinhard Selten. In der breiten Gesellschaft wurde er durch den Film *A beautiful mind* (2001) bekannt. Eine Version des Nash-Gleichgewichts wurde bereits 1838 durch den französischen Mathematiker Antoine Cournot benutzt.

In diesem Kapitel definieren wir, was genau ein Nash-Gleichgewicht ist und betrachten, wie wir es finden können.

3.1 Beste Reaktionen

Wenn die Strategie von Spieler 1 schon bekannt ist, ist es für Spieler 2 möglich, eine optimale Strategie dagegen zu spielen. Wenn Spieler 1 zum Beispiel bei „Schere, Stein, Papier“ immer „Stein“ spielt, sollte Spieler 2 immer „Papier“ spielen.

Aufgabe 3.1. Wenn Spieler 1 in „Schere, Stein, Papier“ die Strategie $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ spielt, welche Strategie ergibt dann für Spieler 2 den höchsten zu erwartenden Gewinn?

> Wenn die Strategie von Spieler 1 bekannt ist, dann ist eine Strategie von Spieler 2 eine **beste Reaktion** darauf, wenn die Strategie bei der gegebenen Strategie von Spieler 1 den höchstmöglichen zu erwartenden Gewinn für Spieler 2 erzielt. Wir benutzen dieselben Begriffe, wenn Spieler 1 und 2 gewechselt werden.

Wenn Spieler 1 in „Matching Pennies“ „Kopf“spielt, ist die beste Reaktion von Spieler 2, Zahl zu spielen. Es kann vorkommen, dass mehrere beste Strategien bestehen. Wenn in Matching Pennies die Strategie von Spieler 1 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist, dann ist der erwartete Gewinn von Spieler 2 gleich 0, unabhängig von seiner eigenen Strategie. Jede mögliche Strategie von Spieler 2 ist also eine beste Reaktion auf $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2. Auch in „Schere, Stein, Papier“ gibt es eine Strategie von Spieler 1, bei der jede Strategie von Spieler 2 eine beste Reaktion ist. Welche Strategie ist das?

3.2 Reine Nash-Gleichgewichte

Wenn beide Spieler eine Strategie spielen, die eine beste Reaktion auf die Strategie des anderen Spielers ist, dann heißt das ein **Nash-Gleichgewicht**. Ein **reines Nash-Gleichgewicht** ist ein Nash-Gleichgewicht, bei dem beide Spieler eine reine Strategie spielen, also immer dieselbe Aktion wählen.

Reine Nash-Gleichgewichte sind einfacher zu finden als **gemischte Nash-Gleichgewichte**, bei denen nicht beide Spieler eine reine Strategie spielen. In einem reinen Nash-Gleichgewicht bekommen beide Spieler also das beste Ergebnis, das sie bekommen können, wenn die Aktion des anderen Spielers gegeben ist.

Nash hat bewiesen, dass jedes Spiel mindestens ein Nash-Gleichgewicht (oder eben mehrere) hat. Nicht jedes Spiel hat ein reines Nash-Gleichgewicht. Aber wenn ein Spiel eins hat, dann ist es einfacher zu finden als gemischte Nash-Gleichgewichte.

Wenn Spiele mehrere Male nacheinander gespielt werden, kann das bedeuten, dass die Spieler die ganze Zeit das Nash-Gleichgewicht spielen. Das ist in dem Sinne optimal, dass beide Spieler die beste Reaktion auf die Aktion des Gegenspielers spielen. Aber, wie wir später sehen werden, kann das manchmal auch komisch sein, weil das Nash-Gleichgewicht nicht unbedingt den höchsten Gewinn liefert, den ein Spieler bekommen kann. Durch das Verändern beider Aktionen kann der Gewinn manchmal für beide Spieler höher werden als im Nash-Gleichgewicht. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist das **Gefangenendilemma**, siehe Beispiel 3.6.

Beispiel 3.3. Beginnen wir mit einem Spiel, das durch diese Bimatrix beschrieben wird:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \color{red}{X} & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 37;\,10 & 8;\,6 & 2;\,7 \\ \color{blue}{39};\,20 & 48;\,50 & 41;\,37 \\ 1;\,47 & 33;\,5 & 4;\,23 \\ \color{blue}{39};\,28 & 50;\,39 & 27;\,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

(Das ist kein Nullsummenspiel, weil die Gewinne der beiden Spieler zusammen nicht 0 sind.)

In dieser Matrix suchen wir zu jeder reinen Strategie die jeweils beste Reaktion des anderen Spielers. Wenn Spieler 2 zum Beispiel die Aktion X spielt, dann kann Spieler 1 am besten B oder D spielen. Für diese beiden Aktionen bekommt er nämlich jeweils als Ergebnis 39 , was höher als 37 oder 1 ist. Wir betrachten jetzt für jede Aktion beider Spieler, welche Aktion des anderen Spielers dabei die jeweils beste ist. Wenn wir die Ergebnisse dieser Aktionen unterstreichen, bekommen wir die folgende Matrix:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 37;\,\underline{10} & 8;\,6 & 2;\,7 \\ \underline{39};\,20 & 48;\,\underline{50} & \underline{41};\,37 \\ 1;\,\underline{47} & 33;\,5 & 4;\,23 \\ \underline{39};\,28 & \underline{50};\,\underline{39} & 27;\,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wenn bei einer Kombination von Aktionen beide Ergebnisse unterstrichen sind, dann spielen beide Spieler eine beste Reaktion zur Aktion des anderen. In diesem Beispiel ist das nur bei der Kombination der Aktionen $\begin{pmatrix} D & Y \end{pmatrix}$ der Fall. Das ist also das einzige reine Nash-Gleichgewicht dieses Spiels.

Aufgabe 3.4. Unterstreicht bei der folgenden Matrix alle besten Aktionen als Reaktionen auf die reinen Strategien des Gegenspielers und gebt alle reinen Nash-Gleichgewichte an.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 20;\,12 & 14;\,13 & 5;\,19 & 11;\,6 \\ 8;\,15 & 2;\,10 & 19;\,18 & 6;\,12 \\ 7;\,3 & 11;\,5 & 3;\,20 & 9;\,15 \\ 18;\,8 & 10;\,13 & 6;\,20 & 9;\,4 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.3 Gemischte Nash-Gleichgewichte

Im allgemeinen ist es schwer, Nash-Gleichgewichte, bei denen die Strategien nicht rein sein müssen, die also gemischt sind, zu finden. Wir können aber ein Nash-Gleichgewicht finden, wenn beide Spieler nur zwei mögliche Aktionen haben. Wie das funktioniert, zeigen wir wieder anhand eines Beispiels.

Beispiel 3.5. Wir betrachten ein Spiel, das durch die folgende Bimatrix gegeben wird:

$$\begin{pmatrix} 5;3 & 2;5 \\ 4;5 & 5;1 \end{pmatrix}$$

Wir nennen die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 die erste Spalte spielt, q. Dann ist der erwartete Gewinn von Spieler 1 beim Spielen der ersten Zeile $5q+2(1-q)$ und bei der zweiten Zeile $4q+5(1-q)$. Daraus folgt, dass die erste Zeile eine beste Reaktion von Spieler 1 auf die Strategie von Spieler 2 ist, wenn $5q+2(1-q) > 4q+5(1-q)$ erfüllt ist. Das können wir vereinfachen:

$$\begin{aligned} & 5q+2(1-q) > 4q+5(1-q) \\ \Leftrightarrow\quad & 5q+2-2q > 4q+5-5q \\ \Leftrightarrow\quad & 3q+2 > -q+5 \\ \Leftrightarrow\quad & 4q+2 > 5 \\ \Leftrightarrow\quad & 4q > 3 \\ \Leftrightarrow\quad & q > \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Für $q > \frac{3}{4}$ ist immer die erste Zeile zu spielen also die beste Reaktion von Spieler 1. Wir sehen genauso, dass immer die zweite Zeile spielen eine beste Reaktion auf alle Strategien mit $q < \frac{3}{4}$ ist. Wenn $q = \frac{3}{4}$, also bei der Strategie $\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ von Spieler 2, ist der erwartete Gewinn von Spieler 1 bei beiden Zeilen gleich. In dieser Situation ist jede mögliche Strategie von Spieler 1 eine beste Reaktion.

Jetzt haben wir die besten Reaktionen von Spieler 1 auf alle Strategien von Spieler 2 gefunden. Jetzt machen wir dasselbe für Spieler 2. Wir nennen die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 die erste Zeile spielt p. Der erwartete Gewinn von Spieler 2, wenn Spieler 2 die erste Spalte spielt, ist dann $3p+5(1-p)$ und bei der zweiten Spalte $5p+1(1-p)$. Die erste Spalte ist also die beste Entscheidung für Spieler 2, wenn $3p+5(1-p) > 5p+1(1-p)$. Das schreiben wir um:

$$\begin{aligned} & 3p+5(1-p) > 5p+1(1-p) \\ \Leftrightarrow\quad & 3p+5-5p > 5p+1-p \\ \Leftrightarrow\quad & -2p+5 > 4p+1 \\ \Leftrightarrow\quad & -6p+5 > 1 \\ \Leftrightarrow\quad & -6p > -4 \\ \Leftrightarrow\quad & 6p < 4 \\ \Leftrightarrow\quad & p < \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Also ist die reine Strategie, bei der Spieler 2 immer die erste Spalte spielt die beste Reaktion auf die Strategie $\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ von Spieler 1, wenn $p < \frac{2}{3}$. Daraus sehen wir genauso, dass die reine Strategie, bei der Spieler 2 immer die zweite Spalte spielt, die beste Reaktion ist, wenn $p > \frac{2}{3}$ und dass jede Strategie eine beste Reaktion ist, wenn $p = \frac{2}{3}$, also bei der Strategie $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$von Spieler 1.

Um das übersichtlicher zu machen, zeichnen wir es in eine Grafik. Wir zeichnen für beide Spieler eine Linie, die die beste Reaktion auf die Strategie des anderen Spielers angibt. Erst fassen wir nochmal kurz zusammen, was die besten Reaktionen für beide Spieler sind.

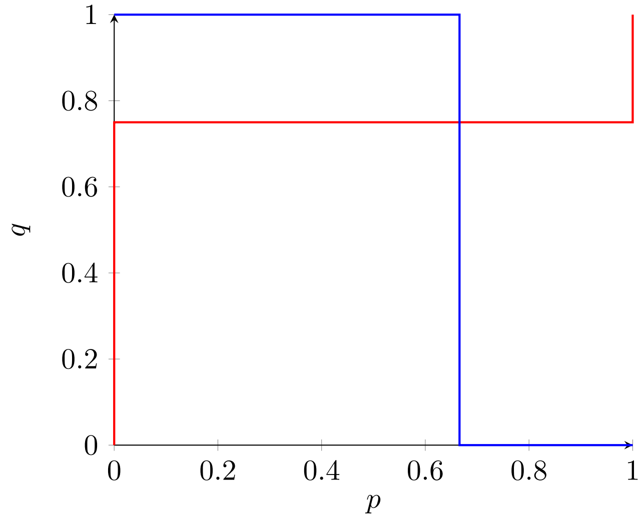
Beste Reaktionen von Spieler 1

$$p = \begin{cases} 0 & \text{wenn } q < \frac{3}{4} \\ \text{egal} & \text{wenn } q = \frac{3}{4} \\ 1 & \text{wenn } q > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Beste Reaktionen von Spieler 2

$$q = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p < \frac{2}{3} \\ \text{egal} & \text{wenn } p = \frac{2}{3} \\ 0 & \text{wenn } p > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Die Grafiken sehen dann so aus:



Nash-Gleichgewichte sind Punkte, bei denen beide Spieler eine beste Reaktion auf die Strategie des anderen Spielers spielen. In dieser Grafik sind die Nash-Gleichgewichte genau die Schnittpunkte der beiden Linien. Davon gibt es jetzt einen: Den Punkt $(p, q) = (\frac{2}{3}, \frac{3}{4})$. Also schlussfolgern wir, dass dieses Spiel ein Nash-Gleichgewicht hat, nämlich die folgenden Strategien der beiden Spieler:

$$\text{Spieler 1: } \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$
$$\text{Spieler 2: } \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.6. Ein Nash-Gleichgewicht ist leider nicht immer eine optimale Situation. Das klassische Gegenbeispiel ist das **Gefangenendilemma**. Im Gefangenendilemma werden zwei Menschen eines Verbrechens verdächtigt und werden unabhängig voneinander befragt. Wenn keiner der beiden den anderen verrät, gibt es für eine lange Freiheitsstrafe nicht genug Beweise und beide Verdächtigten müssen ein Jahr ins Gefängnis. Wenn einer der beiden den anderen verrät, bekommt derjenige als Belohnung keine Strafe und der andere die maximale Strafe von zehn Jahren. Wenn beide einander verraten, bekommen beide neun Jahre Gefängnisstrafe. In einer Matrix sieht das aus wie folgt:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{Schweigen} & \text{Verraten} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Schweigen} \\ \text{Verraten} \end{array} & \begin{pmatrix} \text{-1; -1} & \text{-10; 0} \\ \text{0; -10} & \text{-9; -9} \end{pmatrix} \end{array}$$

Wenn Gefangener 1 „Schweigen“ wählt, dann ist es für Gefangenen 2 vorteilhaft, „Verraten“ zu wählen; seine Strafe wäre 1 Jahr, wenn er schweigt und 0 Jahre, wenn er Gefangenen 1 verrät. Wenn Gefangener 1 „Verraten“ wählt, ist es für Gefangenen 2 wieder besser, auch „Verraten“ zu wählen. Damit bekommt er nur 9 anstelle von 10 Jahren Gefängnisstrafe.

Gefangener 2 kann also in beiden Fällen nicht weniger Strafe bekommen, wenn er „Schweigen“ anstelle von „Verraten“ wählt. Angesichts dessen, dass dasselbe Argument aus Symmetriegründen auch gilt, wenn wir die Gefangenen 1 und 2 vertauschen, ist für beide Gefangenen die Option „Verraten“

eine beste Reaktion auf beide Aktionen des anderen Gefangenen. Damit bekommen beide 9 Jahre Gefängnisstrafe.

Das (reine) Nash-Gleichgewicht ist also $\big(\text{Verraten} \quad \text{Verraten}\big)$.

Wenn ihr in die Matrix schaut, gibt es wohl eine bessere Option für beide Gefangene: wenn sie beide schweigen und nur ein Jahr Gefängnisstrafe bekommen. Hierfür müssen sie zusammenarbeiten und einander vertrauen. Es kann also auch vorkommen, dass Zusammenarbeiten ein besseres Ergebnis als das Nash-Gleichgewicht bringt. Sobald aber einer der beiden Spieler von seiner Entscheidung abweicht und die Absprache somit ignoriert (und die Verlockung ist groß, weil es für ihn dann eine bessere Alternative gibt!), kann es für den anderen Spieler umgekehrt ein Ergebnis bedeuten, dass unter dem des Nash-Gleichgewichts liegt.

3.4 Anwendung: Habicht-Taube

Eins der vielen Fachgebiete, in denen die Spieltheorie praktisch sein kann, ist die Evolutionstheorie. Als Beispiel hierfür betrachten wir ein Spiel, das in der Natur sehr oft „gespielt" wird. Zwei Tiere finden gleichzeitig etwas zu essen. Sie können wählen, ob sie alles für sich selbst haben wollen, oder ob sie bereit sind zu teilen. Die Tiere, die bereit sind zu teilen, nennen wir die Tauben und die, die alles für sich wollen und bereit sind dafür zu kämpfen, die Habichte.

Wir können dieses Spiel so interpretieren, dass wir zwei Tiere derselben Art haben, die beide eine Aktion wählen müssen, oder so, dass zwei Tiere verschiedener Arten die Aktion wählen, die zu ihrer Art passt. In der zweiten Interpretation kann das Modell benutzt werden, um vorherzusagen, wie viel die beiden Tierarten im Verhältnis zueinander bekommen. Das Spiel funktioniert wie folgt:

- wenn beide Spieler Tauben sind, teilen sie die Nahrung,
- wenn ein Spieler eine Taube und der andere ein Habicht ist, bekommt der Habicht das gesamte Essen,
- wenn beide Spieler Habichte sind, kämpfen sie. Der Gewinner bekommt die Nahrung und der Verlierer wird beim Kampf verletzt.

Wenn wir den Wert der Nahrung N nennen und die Kosten der Verletzung K, dann sieht das Spiel in einer Matrix wie folgt aus:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Habicht} & \text{Taube} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Habicht} \\ \text{Taube} \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{N-K}{2}; \frac{N-K}{2} & N; 0 \\ 0; N & \frac{N}{2}; \frac{N}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Das Ergebnis, wenn beide Spieler Habichte sind, ist der erwartete Gewinn eines Habichts im Kampf mit einem anderen Habicht. Wenn zwei Habichte aneinander geraten, wissen wir nämlich noch nicht, was ihr Gewinn im Spiel ist. Wir nehmen an, dass alle Habichte gleich stark sind. Beide Habichte haben dann eine 50% Chance zu gewinnen und 50% Chance verwundet zu werden. Daraus folgt, dass der erwartete Gewinn $\frac{N-K}{2}$ ist. In den meisten Situationen wird die Annahme gemacht, dass die Kosten der Verletzung (K) größer sind als der Gewinn der Nahrung (N), also $K > N$. Wenn das der Fall ist, können wir mit der Methode aus Abschnitt 3.3 die Nash-Gleichgewichte dieses Spiels bestimmen.

Aufgabe 3.7. Wir geben dem Essen den Wert $N = 1$ und den Kosten des Verletztwerdens $K = 5$. Was sind dann die Nash-Gleichgewichte dieses Spiels?

1973 wurde eine etwas ausgeweitete Version dieses Modells in einer Publikation[1] verwendet, um zu erklären, warum viele Tiere nicht aggressiv mit ihren Artgenossen kämpfen.

[1] „The logic of animal conflict" von John Maynard Smith und George Robert Price in der Zeitschrift Nature.

Kapitel 4

Abwechselnd spielen

In allen Spielen, die wir bisher betrachtet haben, wählen beide Spieler gleichzeitig ihre Aktionen. In vielen echten Situationen muss das nicht der Fall sein. Deshalb ist es auch interessant, Spiele zu analysieren, in denen die Spieler abwechselnd ihre Entscheidungen treffen. Dies können wir analysieren, indem wir sie auf eine andere Art aufschreiben, nämlich in der **extensiven Form**. Wir lernen auch eine andere Art und Weise, diese Spiele zu repräsentieren: die **strategische Form**.

4.1 Spiele in der extensiven Form

Bei einem Spiel, bei dem Spieler abwechselnd ihre Aktionen wählen, ist die **extensive Form** des Spiels ein Diagramm, in dem für jeden Spieler die möglichen Aktionen als Reaktionen auf die Aktionen des anderen Spielers stehen. Unten stehen die Ergebnisse für alle Spieler.

Dieser Begriff ist wieder am einfachsten anhand von Beispielen zu verdeutlichen.

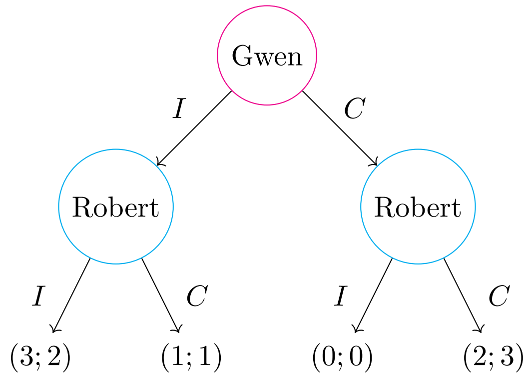
Beispiel 4.1. Gwen und Robert gehen zusammen essen, aber sie haben beide verschiedene Vorlieben. Gwen will am liebsten zu einem italienischen Restaurant (1 Punkt) und Robert zu einem chinesischen Restaurant (1 Punkt). Sie finden es beide sehr wichtig, zusammen in ein Restaurant zu gehen (2 Punkte). Wenn beide gleichzeitig eine Entscheidung treffen müssten, würde das Spiel wie folgt aussehen:

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cc} \text{Italienisch} & \text{Chinesisch} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Italienisch} \\ \text{Chinesisch} \end{array} & \begin{pmatrix} 3;\, 2 & 1;\, 1 \\ 0;\, 0 & 2;\, 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

In dieser Situation gibt es keine dominanten oder dominierten Strategien. Es gibt zwei Nash-Gleichgewichte:

$$(\text{Italienisch} \quad \text{Italienisch}) \quad \text{und} \quad (\text{Chinesisch} \quad \text{Chinesisch})$$

(Diese können wir mit der Methode des Beispiels 3.3 finden.) Jetzt können wir nicht eindeutig bestimmen, was jeder Spieler am besten unternehmen kann. Wenn wir das Spiel so verändern, dass Gwen als Spieler 1 als erstes wählt und Robert danach, sieht das Spiel in der **extensiven Form** wie folgt aus:



Eine extensive Form hat einen Ausgangspunkt (meistens Spieler 1) und geht von dort aus nach unten immer weiter auseinander. Du kannst sie als umgekehrten Baum sehen; oben die Wurzel und nach unten hin die Zweige.

Der Baum hier oben beginnt mit Gwen, die die Entscheidung zwischen italienischem (I) und chinesischem (C) Essen trifft. Danach kann Robert, der Gwens Entscheidung kennt, selbst wählen. Unten stehen für Gwen und Robert die Ergebnisse, die sie bei jeder Entscheidungskombination bekommen können. Indem wir ein Spiel so aufschreiben, können wir direkt sehen, in welcher Reihenfolge die Spieler Entscheidungen treffen können und was ihre Optionen sind.

Beispiel 4.2. Wenn Lomea und Marlynn sich treffen, wollen beide entscheiden, was sie machen. Lomea darf entscheiden, was sie machen, und Marlynn kann danach den Ort dafür wählen. Hierfür wollen sie die extensive Form des Spiels zeichnen, wobei Lomea Spieler 1 ist und mit Wählen beginnt. Sie benutzen dafür die Matrix:

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{ccc} \text{Schlafzimmer} & \text{Küche} & \text{Wohnzimmer} \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{Film schauen} \\ \text{Spiele spielen} \end{array} & \begin{pmatrix} a; b & c; d & e; f \\ g; h & i; j & k; l \end{pmatrix} \end{array}$$

Lomea und Marlynn haben noch keine Werte für die Kombination von Aktivität und Ort gegeben. Deshalb stehen in der Matrix noch die Variablen a bis l.

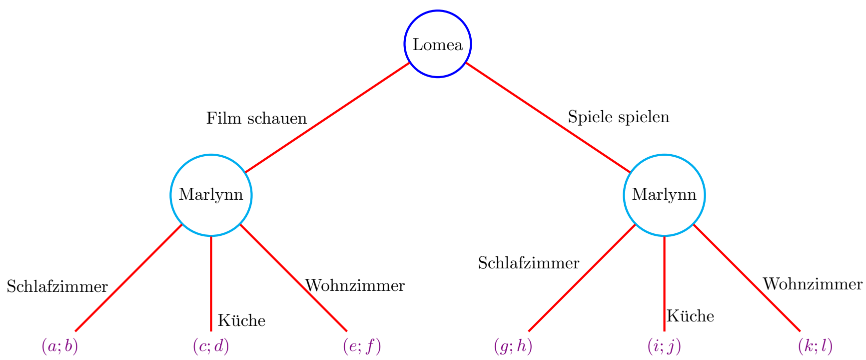
Um eine extensive Form zu zeichnen, folgen wir den Schritten:

1. Schreibt den Namen des Spielers, der die erste Entscheidung trifft, oben an den Baum in einen Kreis.

2. Zeichnet für jede mögliche Aktion vom vorigen Kreis eine Linie nach unten. Schreibt zu jeder Linie den Namen der Aktion.

3. Wenn unter einer Linie keine Entscheidungen mehr getroffen werden, schreibt dann die Gewinne, die zu den Aktionen gehören, unter die Linie. Macht nur dann mit Schritt 4 weiter, wenn noch Entscheidungen getroffen werden müssen.

4. Macht einen Kreis unter jede Linie und schreibt in jeden Kreis den Namen desjenigen, der die nächste Entscheidung trifft. Geht zurück zu Schritt 2.



Wir haben jetzt zwei extensive Formen betrachtet, bei denen beide Spieler je eine Entscheidung treffen konnten. Es gibt auch Varianten, bei denen manche Spieler mehrere Entscheidungen treffen dürfen. Hierbei könnt ihr zum Beispiel an die Reihenfolge Spieler 1, dann Spieler 2 und dann wieder eine Entscheidung von Spieler 1 denken. Im Beispiel hier oben könnte zum Beispiel Lomea noch die Entscheidung treffen, zu welchem Teil des Tages sie sich treffen. Im folgenden Abschnitt zeigen wir noch mehr extensive Formen, bei denen Spieler mehr als eine Entscheidung treffen können. Es kann auch vorkommen, dass eine extensive Form mehr als zwei Spieler hat. Dafür geben wir im letzten Paragraphen ein Beispiel.

Aufgabe 4.3. Juan und Alex wollen zusammmen eine Pizza backen, finden aber verschiedene Kombinationen von Belag lecker. Sie überlegen sich folgende Lösung: Zuerst wählt Juan, ob sie Pizza mit Tomatensauce oder weiße Pizza machen. Danach wählt Alex, ob er Zwiebeln oder Champignons auf der Pizza will. Zuletzt entscheidet Juan, ob sie Mozzarella oder Gorgonzola auf der Pizza essen. Danach backen sie die Pizza und essen sie zusammen auf.

So lecker finden sie alle möglichen Pizzen auf einer Skala von 1 bis 10:

Basis	Champignons oder Zwiebeln	Käse	Juan	Alex
Tomatensauce	Champignons	Mozzarella	9	5
Tomatensauce	Champignons	Gorgonzola	4	7
Tomatensauce	Zwiebeln	Mozzarella	7	6
Tomatensauce	Zwiebeln	Gorgonzola	8	3
Weiß	Champignons	Mozzarella	10	5
Weiß	Champignons	Gorgonzola	5	7
Weiß	Zwiebeln	Mozzarella	7	3
Weiß	Zwiebeln	Gorgonzola	4	8

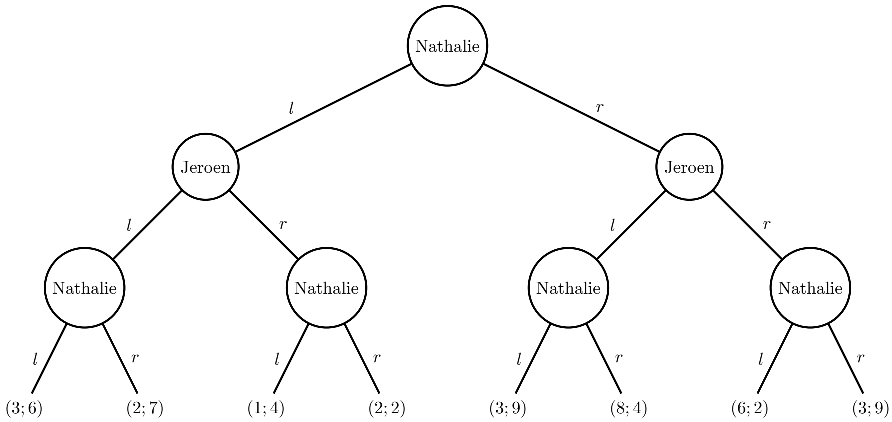
Gebt die Beschreibung dieses Spiels in der extensiven Form.

4.2 Rückwärtsgerichtete Induktion

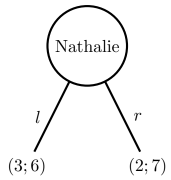
Rückwärtsgerichtete Induktion ist eine Methode, um das Ergebnis eines Spiels in der extensiven Form zu bestimmen, wenn jeder Spieler an jedem Punkt die Entscheidung trifft, die diesem Spieler schlussendlich die meisten Punkte einbringt. Wir schauen hierbei erst nach den Entscheidungen, die die Spieler als letztes treffen, und argumentieren dann zurück.

Bei einer extensiven Form wählen Spieler abwechselnd, was sie wollen. Damit können wir unten beginnen und bei den Kreisen direkt obendrüber schauen, was bei diesem Kreis die beste Aktion ist. Wenn wir das wissen, können wir für den anderen Spieler in den Kreisen darüber schauen, welche Aktion am besten ist und so können wir den Prozess wiederholen, bis wir am obersten Kreis angekommen sind. Diesen Prozess nennen wir rückwärtsgerichtete Induktion.

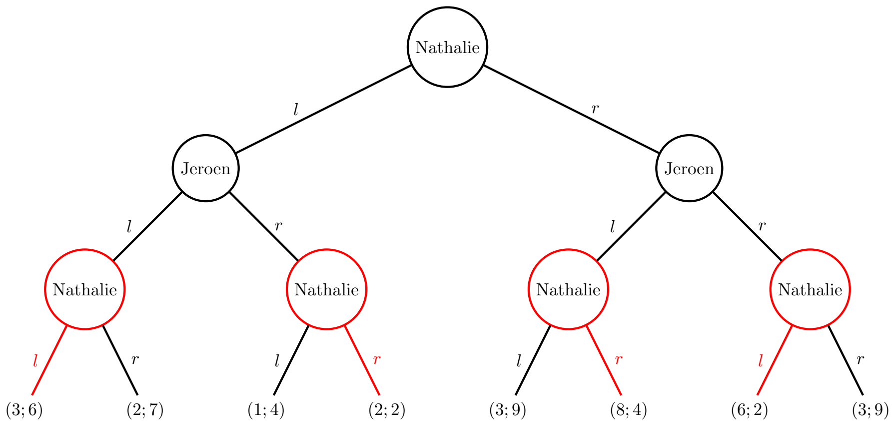
Beispiel 4.4. Lasst uns ein Spiel zwischen Nathalie als Spieler 1 und Jeroen als Spieler 2 betrachten. Beide Spieler haben immer zwei Aktionen, die wir der Einfachheit halber „links“ (l) und „rechts“ (r) nennen. Nathalie spielt erst eine der beiden Aktionen, dann Jeroen und dann wieder Nathalie. Der Gewinn beider Spieler hängt davon ab, welche Kombination von Aktionen gespielt wird, zu sehen in der extensiven Form des Spiels:



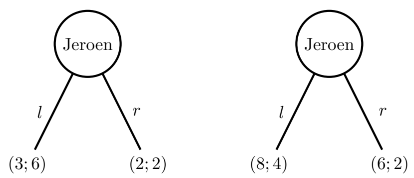
Mit rückwärtsgerichteter Induktion beginnen wir unten. Wir nehmen den Kreis links unten als Beispiel:



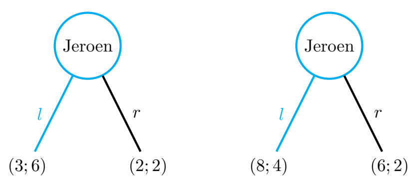
Nathalie wird hier immer links wählen, weil ihr das 3 anstelle von 2 Punkten bringt. Das können wir für alle untersten Kreise machen, bei denen Nathalie eine Entscheidung treffen kann. Wir färben Nathalies jeweils beste Entscheidungen rot.



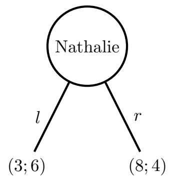
Wir können jetzt für Jeroen zwei Bäume machen. Darin lassen wir die Kreise von Nathalies zweiter Aktion weg und schreiben stattdessen direkt das Ergebnis auf, das wir durch Nathalies beste Aktion nach Jeroens Aktion bekommen. Das gibt uns dann diese Bäume:



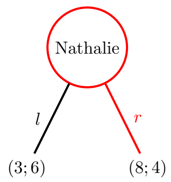
Die beste Entscheidung ist es jetzt für Jeroen (Spieler 2), sowohl beim linken als auch beim rechten Baum nach links zu gehen. Das bringt ihm mehr als den rechten Weg zu wählen. Wenn wir diese besten Aktionen für Jeroen blau färben, dann bekommen wir diese Diagramme:



Zum Schluss betrachten wir Nathalies erste Aktion. Wir schreiben diese in ein Diagramm, wobei wir für jede der zwei Aktionen das Ergebnis aufschreiben, das wir bekommen, nachdem Jeroen seine beste Aktion gespielt hat (und also auch nach Nathalies zweiter Aktion). Das gibt uns noch folgendes Diagramm:

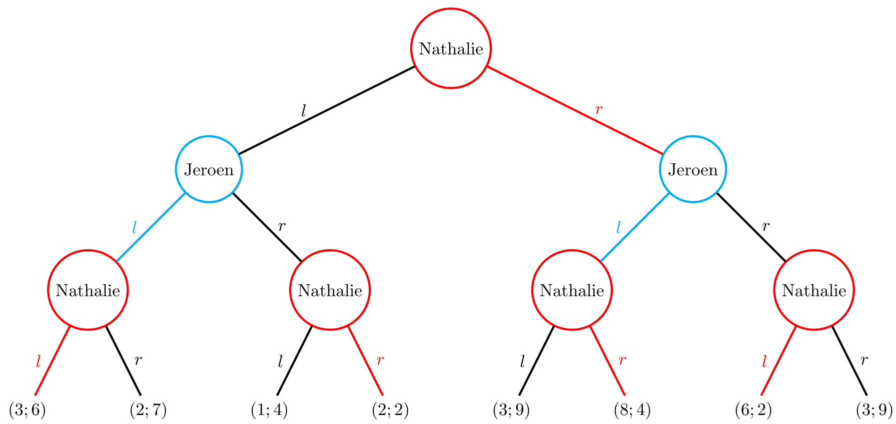


Wenn Nathalies erste Aktion links ist, weiß sie auch, dass Jeroen danach links wählt und sie danach auch wieder links nimmt. Damit ist das Ergebnis also $(3; 6)$ und sie bekommt also 3. Wenn sie rechts wählt, weiß sie, dass Jeroen nach links und sie danach rechts nimmt. Damit ist das Ergebnis $(8; 4)$ und sie bekommt 8. Nathalies beste Entscheidung ist es also bei ihrer ersten Wahl nach rechts zu gehen. Wenn wir diese Entscheidung rot färben, bekommen wir:



Der schlussendliche Gewinn ist 8 für Nathalie und 4 für Jeroen.

Das Diagramm für das gesamte Spiel mit jeder besten Aktion farblich markiert ist das Folgende:



> Die Kombination der Entscheidungen, die die Spieler treffen, wenn sie rückwärtsgerichtete Induktion benutzen, nennen wir das **Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion**.

In diesem Fall ist das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion die Kombination der Entscheidungen, durch die wir immer über gefärbte Pfade von oben nach unten gehen. Für Nathalie sind das die Aktionen rr und für Jeroen die Aktion l. Das Ergebnis bei diesem Gleichgewicht ist ein Gewinn von 8 für Nathalie und ein Gewinn von 4 für Jeroen.

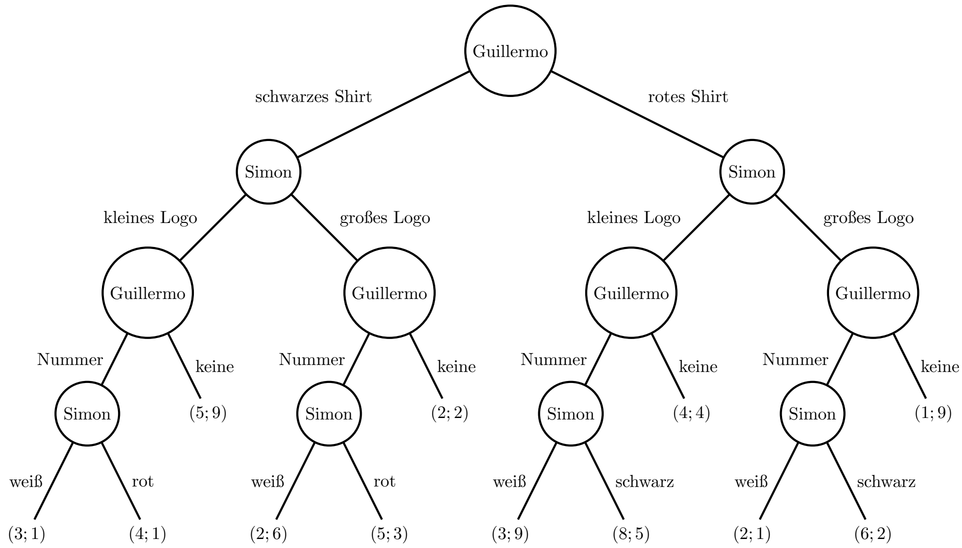
Aufgabe 4.5. Bestimmt das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion und das zugehörige Ergebnis in Beispiel 4.1.

Aufgabe 4.6. Bestimmt das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion und das zugehörige Ergebnis aus Aufgabe 4.3.

Aufgabe 4.7. Guillermo und Simon wollen zusammen neue Wettkampfshirts für ihr Volleyballteam designen. Guillermo wählt erst, ob die Shirts schwarz oder rot werden. Danach wählt Simon, ob das Logo des Clubs klein oder groß abgebildet wird. Guillermo entscheidet danach, ob Nummern auf dem

Rücken stehen oder nicht. Wenn Nummern aufs Shirt kommen, darf Simon wählen, ob die Nummern weiß oder rot/schwarz gedruckt werden.

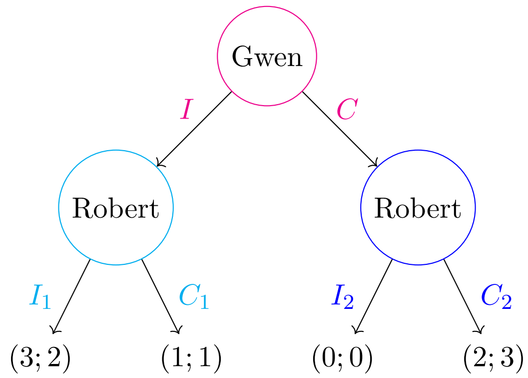
Ihre Entscheidungen, inklusive der Scores, wie schön sie die Shirts am Ende finden, sind in der extensiven Form gegeben:



Bestimmt mit Hilfe rückwärtsgerichteter Induktion, wie die neuen Wettkampfshirts aussehen werden.

4.3 Die strategische Form

Schauen wir noch einmal zu dem Beispiel 4.1 von Gwen und Robert, die essen gehen, wobei zuerst Gwen und dann Robert wählt.



Robert kann in diesem Spiel seine Entscheidungen davon abhängen lassen, was Gwen wählt.

> Einen vollständigen Plan, der bei jedem Kreis in einem Baum angibt, was gewählt wird, nennen wir eine **extensive Strategie**.

Um mögliche extensive Strategien[1] von Robert gut aufschreiben zu können, müssen all seine Aktionen verschiedene Namen haben, deshalb haben wir sie im Baum hierüber I_1, C_1, I_2 und C_2 genannt. Die extensive Strategie „wenn Gwen Italienisch wählt, wähle ich auch Italienisch und wenn Gwen Chinesisch wählt, wähle ich auch Chinesisch“ können wir jetzt kurz aufschreiben als I_1C_2. Hier gibt der erste Buchstabe in der extensiven Strategie an, welche Aktion er beim einen Kreis und der zweite Buchstabe, welche Aktion er beim anderen Kreis wählen würde.

[1]Der offizielle Name ist einfach Strategie, aber weil wir diesen Begriff vorher schon benutzt haben, nennen wir dies eine extensive Strategie.

Die **strategische Form** eines Spiels in der extensiven Form ist eine Matrix, in der die Zeilen die möglichen extensiven Strategien des Zeilenspielers und die Spalten die möglichen extensiven Strategien des Spaltenspielers sind. Die Matrix ist eine Bimatrix, die an jeder Stelle das Ergebnis bei gegebenen extensiven Strategien der beiden Spieler gibt.

Das Spiel hierüber sieht in der strategischen Form wie folgt aus:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} I_1 I_2 & I_1 C_2 & C_1 I_2 & C_1 C_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} I \\ C \end{array} & \begin{pmatrix} 3;\,2 & 3;\,2 & 1;\,1 & 1;\,1 \\ 0;\,0 & 2;\,3 & 0;\,0 & 2;\,3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wir sehen an der Matrix, dass das ein anderes Spiel ergibt als die Situation, in der Robert und Gwen gleichzeitig wählen. Indem Robert auf die Entscheidung von Gwen reagieren kann, hat er jetzt anstelle von 2 Aktionen 4 mögliche Aktionen.

Wir können aus der extensiven Form auch das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion finden (siehe Aufgabe 4.5). Dieses Gleichgewicht ist hier durch die Entscheidungen I und I_1 gegeben.

Die Nash-Gleichgewichte eines Spiels in extensiver Form sind definiert als die Nash-Gleichgewichte des zugehörigen Spiels und der strategischen Form. Das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion der extensiven Form ist immer ein Nash-Gleichgewicht der strategischen Form. Wenn die strategische Form nur ein Nash-Gleichgewicht hat, ist das auch das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion.

Aufgabe 4.8. Gebt die strategische Form des Spiels in Beispiel 4.2 an. (Gebt zunächst allen Aktionen praktische Namen im Diagramm beim Beispiel.)

4.4 Beispiel: Triell

Wir können auch kompliziertere Spiele in der extensiven Form analysieren. Dafür geben wir jetzt ein Beispiel: ein Spiel mit drei Spielern, in dem Wahrscheinlichkeiten auch noch eine Rolle spielen. Das Material in diesem letzten Abschnitt ist nicht direkt nötig für das Lösen der Sum of Us-Aufgaben beim Mathematikturnier, aber er gibt uns eine Idee, wie die Theorie aus diesem Kapitel in allgemeineren Situationen benutzt werden kann.

Ein **Triell** ist ein Duell zwischen drei Personen. In diesem Beispiel wird das mit Pistolen ausgefochten, und die Teilnehmenden bekommen in abgesprochener Reihenfolge die Chance, auf einen anderen Teilnehmenden zu schießen. Wir wollen ein Triell zwischen Jack Sparrow, Will Turner und James Norrington betrachten. Alle drei haben eine Pistole und eine bestimmte Anzahl an Kugeln. Die Reihenfolge, in der sie schießen, ist bestimmt, und alle drei haben jeweils eine Treffwahrscheinlichkeit, wenn sie schießen. Diese Informationen stehen hier unten in der Tabelle wiedergegeben. (Will kann besonders gut schießen und trifft immer.)

Name	Runde	Treffwahrscheinlichkeit	Kugeln
Jack	1	p	2
Will	2	1	2
James	3	q	1

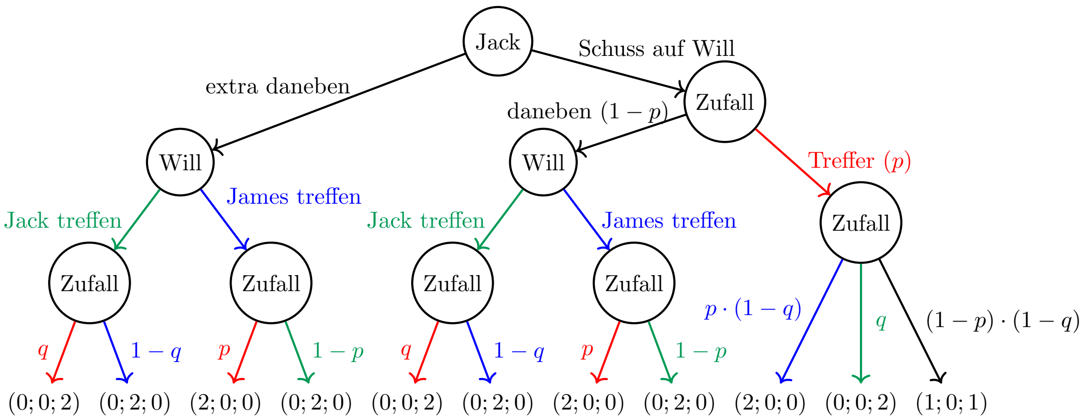
In der ersten Runde zweifelt Jack zwischen extra daneben schießen, oder probieren, Will zu treffen. Wenn Jack probiert, Will zu treffen, kommen wir zu einem Kreis, bei dem „der Zufall eine Entscheidung trifft“; so repräsentieren wir zufällige Ergebnisse in der extensiven Form. Mit Wahrscheinlichkeit p trifft Jack und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ schießt er daneben. Wenn Jack trifft, folgen wir dem Weg „Treffer“, und wenn er daneben schießt, dem Weg „daneben“. Die Wahrscheinlichkeiten, diesen Wegen zu folgen, werden durch die Treffwahrscheinlichkeit von Jack bestimmt.

Sobald nur noch zwei Spieler übrig sind, probieren sie immer, einander zu treffen. Von diesem Punkt an werden also keine Entscheidungen mehr getroffen, sondern alle Ergebnisse sind durch die

Treffwahrscheinlichkeiten bestimmt. Die übrig gebliebenen Spieler schießen abwechselnd aufeinander bis ein Spieler den anderen trifft oder alle Kugeln verschossen sind. Im folgenden haben wir das Spiel in der extensiven Form gezeichnet; nicht getroffen zu werden gibt einen Punkt in dem Spiel, und als einziger nicht getroffen zu werden (also zu gewinnen) nochmal einen Punkt.

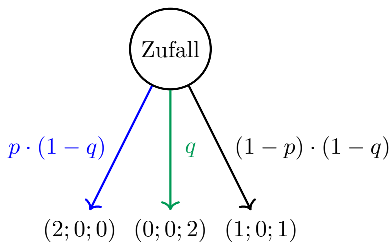
Legende (zur Erklärung der Farben und der finalen Wertung):

- Will wird getroffen
- James wird getroffen
- Jack wird getroffen
- (Gewinn Jack; Gewinn Will; Gewinn James)



In diesem Diagramm haben wir Kreise und Linien weggelassen, wenn ein Spieler nur eine mögliche Aktion ausführen kann (weil nur noch zwei Triellisten übrig sind) und also keine Entscheidung mehr treffen müssen. So wie gesagt, wird das Ergebnis von diesem Moment an durch die Treffwahrscheinlichkeiten bestimmt.

Wenn Jack zum Beispiel als erstes auf Will schießt und diesen trifft, dann ist danach James an der Reihe. Der schießt auf seinen einzig übrigen Gegenspieler Jack, trifft ihn mit der Chance q und schießt mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ daneben. Wenn James trifft, ist er der einzig übrige Triellist und das Ergebnis ist $(0;0;2)$. Wenn James daneben schießt, ist Jack an der Reihe. Jack kann nur auf James schießen und trifft ihn mit der Wahrscheinlichkeit p. Wenn er ihn trifft, ist er als einziger übrig und das Ergebnis ist $(2;0;0)$. Wenn Jack daneben schießt ist das Triell auch vorbei, weil weder Jack noch James noch Kugeln haben. Dann ist das Ergebnis $(1;0;1)$. Im oben stehenden Diagramm sind diese Ergebnisse rechts unten wiedergegeben.



Wenn Jack den ersten Schuss daneben schießt, ist Will an der Reihe, der immer jemanden trifft. Will wählt, auf wen er schießen will, und danach wird das Spiel durch die Treffwahrscheinlichkeiten bestimmt, weil der übrig gebliebene Spieler und Will immer aufeinander schießen.

Wir benutzen rückwärtsgerichtete Induktion und schauen dabei nur nach den Entscheidungen, die die Spieler treffen, und nicht nach den Entscheidungen, die vom Zufall abhängen. Wir wissen, dass James nie eine Entscheidung treffen muss, deshalb steht er auch nicht im Diagramm und wird also auch nicht bei der rückwärtsgerichteten Induktion berücksichtigt.

Wir beginnen mit den Entscheidungen von Will. Wenn Will an der Reihe ist, hat er als Ergebnis 0 oder 2. Er wird die Option wählen, bei der er die größte Wahrscheinlichkeit auf das Ergebnis 2 hat. Wenn Will auf Jack schießt, ist sein Ergebnis 2 mit Wahrscheinlichkeit $1-q$. Wenn Will aber auf James schießt, ist sein Ergebnis 2 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$.

Falls $p > q$, also $1-q > 1-p$, dann wird Will auf Jack schießen, wenn er die Chance bekommt. Diese Chance bekommt Will sicherlich, wenn Jack extra daneben schießt, und nur mit Wahrscheinlichkeit $1-p$, wenn Jack bei seinem ersten Schuss auf Will schießt. Daher muss Jack bei seinem ersten Schuss probieren, Will zu treffen. Das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion besteht also aus der Aktion „Schuss auf Will" für Jack und der Aktion „Schuss auf Jack" für Will.

Nehmt jetzt an, dass $q > p$. Dann wird Will (analog zu eben) auf James schießen, wenn er die Chance bekommt. Wenn Jack also bei seiner ersten Aktion extra daneben schießt, dann bekommt er mit Wahrscheinlichkeit p einen Gewinn von 2 und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ ein Ergebnis von 0. Dann ist sein erwarteter Gewinn also $2p$. Wenn Jack dagegen bei seiner ersten Aktion auf Will schießt, verfehlt er mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ und trifft mit Wahrscheinlichkeit p. Im ersten Fall hat er einen Gewinn von 2 mit Wahrscheinlichkeit p oder verliert; im zweiten hat er einen Gewinn von 2 mit Wahrscheinlichkeit $p(1-q)$, von 1 mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)(1-q)$ oder verliert. Der Erwartungswert ist daher:

$$\begin{aligned}(1-p)\cdot p\cdot 2+p\cdot\Big(p(1-q)\cdot 2+(1-p)(1-q)\cdot 1\Big) &= (1-p)\cdot p\cdot 2+p\cdot\Big(2p+(1-p)\Big)\cdot(1-q)\\ &= (1-p)\cdot p\cdot 2+p\cdot(p+1)\cdot(1-q)\\ &= p\cdot(2(1-p)+(p+1)\cdot(1-q))\end{aligned}$$

Ob es vernünftig für Jack ist, bei seiner ersten Aktion zu probieren, Will zu treffen, hängt also davon ab, welcher von diesen beiden erwartenden Gewinnen der größere ist.

Aufgabe 4.9. Gibt es Werte p und q mit $q > p$, für die Jack am besten probieren kann, Will zu treffen? Wenn ja, könnt ihr die Werte finden?

Kapitel 5

Antworten

Antwort zu Aufgabe 1.4

Die Zahl in Zeile 1 und Spalte 2 ist -3. Wenn ihr 2 als Ergebnis habt, habt ihr Zeile und Spalte verwechselt.

Antwort zu Aufgabe 1.7

$$\begin{array}{c} \\ \text{Kopf} \\ \text{Zahl} \\ \text{Seite} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Kopf} & \text{Zahl} & \text{Seite} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \text{1; -1} & \text{-1; 1} & \text{-1; 1} \\ \text{-1; 1} & \text{1; -1} & \text{-1; 1} \\ \text{-1; 1} & \text{-1; 1} & \text{1; -1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Antwort zu Aufgabe 1.8

Der Gewinn von Annet ist $j+a-ja$ Euro und der von Jasper ist $ja-j-a$ Euro. Die Gewinne addieren sich auf 0, das Spiel ist also ein Nullsummenspiel. In der Matrix dieses Spiels steht der Gewinn für Spieler 1, also Jasper. Das ergibt folgende Matrix:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Antwort zu Aufgabe 1.10

Es gibt vier mögliche Ergebnisse des Spiels, weil beide Spieler nie „Stein“ spielen. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler „Papier“ oder beide Spieler „Schere“ spielen, brauchen wir nicht zu betrachten, weil dann das Ergebnis 0 ist, also nichts dem Erwartungswert hinzufügt. Die Wahrscheinlichkeit, dass Gerbrich „Papier“ und Madelon „Schere“ spielt, ist $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Hierbei hat Madelon das Ergebnis 1. Die Wahrscheinlichkeit, dass Gerbrich „Schere“ und Madelon „Papier“ spielt, ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ und das Ergebnis für Madelon ist hierbei -1. Das ergibt für Madelon einen Erwartungswert von $\frac{4}{9} \cdot 1 + \frac{1}{9} \cdot (-1) = \frac{1}{3}$. Weil das Spiel ein Nullsummenspiel ist, müssen die Erwartungswerte der Spieler sich auf 0 addieren. Gerbrich hat also einen zu erwartenden Gewinn von $-\frac{1}{3}$.

Antwort zu Aufgabe 2.2

Der minimale Gewinn für Spieler 1 für jede Aktion ist die niedrigste Zahl der zugehörigen Zeile. Diese Zahlen sind hier in rot angegeben:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der maximale dieser drei minimalen Gewinne ist die Zahl 1 in der dritten Zeile. Also ist die reine Maximin-Strategie für Spieler 1, immer die Aktion zu spielen, die zur dritten Zeile gehört.

Der maximale Verlust für Spieler 2 für jede Aktion ist die größte Zahl in der zugehörigen Spalte. Diese Zahlen sind hier rot markiert:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Der minimale dieser drei maximalen Verluste ist die Zahl 3 in der ersten Spalte. Also ist die reine Minimax-Strategie für Spieler 2, immer die Aktion zu spielen, die zur ersten Spalte gehört.

Antwort zu Aufgabe 2.4

Die Maximin-Strategie für Spieler 1 ist $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Bei dieser Strategie ist der erwartete Gewinn gegen jede Aktion von Spieler 2 gleich 0. Wenn Spieler 1 eine Aktion öfter spielt, dann wird die andere Aktion von Spieler 2 einen negativen erwarteten Gewinn geben, also kann der minimale zu erwartende Gewinn bei keiner Strategie höher als 0 werden.

Antwort zu Aufgabe 2.5

Wir können beginnen, indem wir $4x + 6y + 9z = \frac{17}{3}$ von $7x + 6y + 3z = \frac{17}{3}$ subtrahieren. Daraus folgt $3x - 6z = 0$, also $x = 2z$. Das können wir in $x + y + z = 1$ einsetzen, um $2z + y + z = 1$ oder $y = 1 - 3z$ zu finden. Wenn wir das beides in $4x + 6y + 9z = \frac{17}{3}$ einsetzen, bekommen wir $4 \cdot 2z + 6 \cdot (1 - 3z) + 9z = \frac{17}{3}$. Das können wir zu $z = \frac{1}{3}$ vereinfachen. Daraus folgen dann auch direkt die Werte für x und y. So bekommen wir $x = \frac{2}{3}$, $y = 0$ und $z = \frac{1}{3}$.

Antwort zu Aufgabe 2.6

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Torwart} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Natürlich} & \text{Unnatürlich} \end{array} \\ \text{Feldspieler} & \begin{array}{r} \text{Natürlich} \\ \text{Unnatürlich} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}70 & 0{,}93 \\ 0{,}95 & 0{,}58 \end{pmatrix} \end{array}$$

Antwort zu Aufgabe 2.7

Die Grafik des zu erwartenden Gewinns des Feldspielers enthält die Geraden $0{,}70p + 0{,}95 \cdot (1 - p)$ und $0{,}93p + 0{,}58 \cdot (1 - p)$ mit p der Wahrscheinlichkeit, die natürliche Seite zu wählen. Die eine Gerade ist steigend und die andere fallend, deshalb ist der Punkt, an dem die niedrigste Gerade so hoch wie möglich ist, der Schnittpunkt dieser zwei Geraden. Diesen Punkt bestimmen wir, indem wir die Gleichung

$$0{,}70p + 0{,}95 \cdot (1 - p) = 0{,}93p + 0{,}58 \cdot (1 - p)$$

lösen. Daraus finden wir (abgerundet) $p = 0{,}62$. Dann folgt die Maximin-Strategie $\begin{pmatrix} 0{,}62 & 0{,}38 \end{pmatrix}$ für den Feldspieler.

Indem wir den erwarteten Gewinn dieser Strategie bei einer der Aktionen des Torwarts betrachten, finden wir den Wert dieses Spiels. Dieser ist ungefähr 0,796.

Jetzt müssen wir, um eine Minimax-Strategie für den Torwart zu finden, nur noch das folgende Gleichungssystem lösen:

- $0{,}70q + 0{,}93 \cdot (1-q) = 0{,}796$
- $0{,}95q + 0{,}58 \cdot (1-q) = 0{,}796$

Dann haben wir für den Torwart die Minimax-Strategie $\begin{pmatrix}0{,}58 & 0{,}42\end{pmatrix}$.

Antwort zu Aufgabe 2.8

Wenn wir annehmen, dass ihr gerne Geld von euren Eltern bekommt, ist die zweite Zeile strikt dominiert. Diese Zeile ist durch die dritte Zeile dominiert, weil ihr in dieser immer Geld bekommt. Die zweite Zeile ist nicht durch die erste Zeile strikt dominiert, weil die Ergebnisse hierbei in der zweiten Spalte gleich sind.

Antwort zu Aufgabe 2.11

Die rote Aktion ist eine dominante Aktion für Sterre. Wenn Alec rot wählt, dann wählt Sterre auch immer rot (Verlust von 2, während gelb einen Verlust von 4 gibt) und wenn Alec blau wählt, dann wählt Sterre auch rot. Deshalb ist die dominante Aktion von Sterre die rote Aktion.

Antwort zu Aufgabe 2.13

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Strategie, die dann gespielt wird, ist $\begin{pmatrix}p & 0 & q\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}p & 0 & 1-p\end{pmatrix}$, weil es nur noch zwei unbekannte Wahrscheinlichkeiten gibt und $p+q=1$. Wir wollen jetzt nur noch den Wert von p wissen. Das wollen wir für Spieler 2 bestimmen und weil dieser immer einen möglichst niedrigen Gewinn für Spieler 1 (weil das der Verlust für Spieler 2 ist) will, wollen wir die Spalten 1 und 3 mit einer Wahrscheinlichkeit spielen, sodass der totale Gewinn kleiner als der Gewinn in Spalte 2 ist. Wir bekommen dann die folgenden Gleichungen:

- $6p + 2(1-p) < 5 \xrightarrow{\text{ausrechnen}} p < \frac{3}{4}$,
- $7p + 1(1-p) < 5 \xrightarrow{\text{ausrechnen}} p < \frac{2}{3}$,
- $2p + 4(1-p) < 3 \xrightarrow{\text{ausrechnen}} p > \frac{1}{2}$.

Solange p so gewählt wird, dass $\frac{1}{2} < p < \frac{2}{3}$, ist diese Strategie besser als das Spielen von Spalte 2 und deshalb ist Spalte 2 strikt dominiert durch die gemischte Strategie von Spalte 1 und 3.

Antwort zu Aufgabe 3.1

Nehmt an, dass Spieler 2 die Strategie $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ spielt. Dann ist sein zu erwartender Gewinn

$$\frac{1}{2} \cdot y \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot z \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot z \cdot 1 = \frac{y-x}{2}.$$

Die Terme auf der linken Seite korrespondieren mit „Schere-Stein“, „Schere-Papier“, „Stein-Schere“ und „Stein-Papier“. Spieler 1 spielt nie „Papier“, also tragen die Optionen nicht zu seinem erwarteten Gewinn bei. Die Optionen, bei denen beide Spieler dieselbe Aktion spielen, tragen auch nicht zu dem erwarteten Gewinn bei: der Gewinn für beide Spieler ist dann 0.

Der erwartete Gewinn ist maximal (mit x, y, z zwischen 0 und 1 und $x+y+z=1$) wenn $y=1$ und $x=z=0$. Das gibt uns die Strategie $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, also die reine Strategie, bei der Spieler 2 immer Stein spielt.

Antwort zu Aufgabe 3.2

Wenn Spieler 1 bei „Schere, Stein, Papier“ die Strategie $\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$ spielt, ist der erwartete Gewinn für beide Spieler immer 0. Dafür macht es nichts aus, welche Strategie Spieler 2 spielt: Für jede Strategie $\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}$ ist der erwartete Gewinn für beide Spieler

$$\frac{1}{3}(x+y+z-x-y-z)=0.$$

Also ist jede Strategie eine beste Reaktion.

Antwort zu Aufgabe 3.4

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} W & X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} \underline{20};12 & \underline{14};13 & 5;\underline{19} & \underline{11};6 \\ 8;15 & 2;10 & \underline{19};\underline{18} & 6;12 \\ 7;3 & 11;5 & 3;\underline{20} & 9;15 \\ 18;8 & 10;13 & 6;\underline{20} & 9;4 \end{pmatrix} \end{array}$$

Wenn bei einem Paar der Aktionen beide Ergebnisse unterstrichen sind, spielen beide Spieler eine beste Reaktion auf die Aktion des anderen. In diesem Beispiel ist das nur bei der Kombination (B, Y) der Fall. Das ist das einzige Nash-Gleichgewicht mit reinen Strategien von diesem Spiel.

Antwort zu Aufgabe 3.7

Wenn wir die gegebenen Werte einsetzen, erhalten wir die Bimatrix:

$$\begin{pmatrix} -2;-2 & 1;0 \\ 0;1 & \frac{1}{2};\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Mit der Methode aus Beispiel 3.3 finden wir zwei reine Nash-Gleichgewichte: Eins, in dem Spieler 1 immer „Taube“ und Spieler 2 immer „Habicht“ spielt und eins, das genau andersrum ist.

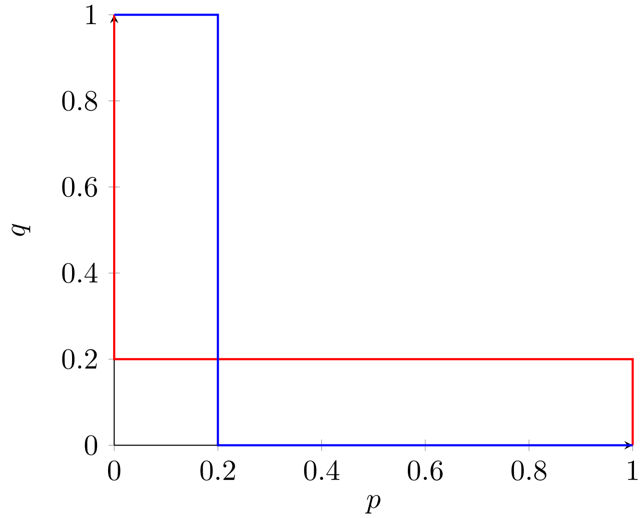
Jetzt bestimmen wir die gemischten Nash-Gleichgewichte. Wir nennen die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 die erste Zeile (Habicht) spielt p und die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 2 die erste Spalte (auch Habicht) spielt q. Die erste Zeile ist dann die beste Reaktion von Spieler 1 auf die Strategie von Spieler 2, wenn $-2q+(1-q)>0+\frac{1}{2}\cdot(1-q)$. Diese Voraussetzungen schreiben wir so:

$$\begin{aligned} -2q+(1-q) &> 0+\frac{1}{2}\cdot(1-q) \\ \Leftrightarrow \quad 1-3q &> \frac{1}{2}-\frac{q}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 1 &> \frac{1}{2}+\frac{5}{2}q \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} &> \frac{5}{2}q \\ \Leftrightarrow \quad 1 &> 5q \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5} &> q \end{aligned}$$

Die erste Zeile ist also eine beste Reaktion, wenn $q<\frac{1}{5}$. Die zweite Zeile ist eine beste Reaktion, wenn $q>\frac{1}{5}$ und jede Strategie von Spieler 1 ist eine beste Reaktion, wenn $q=\frac{1}{5}$.

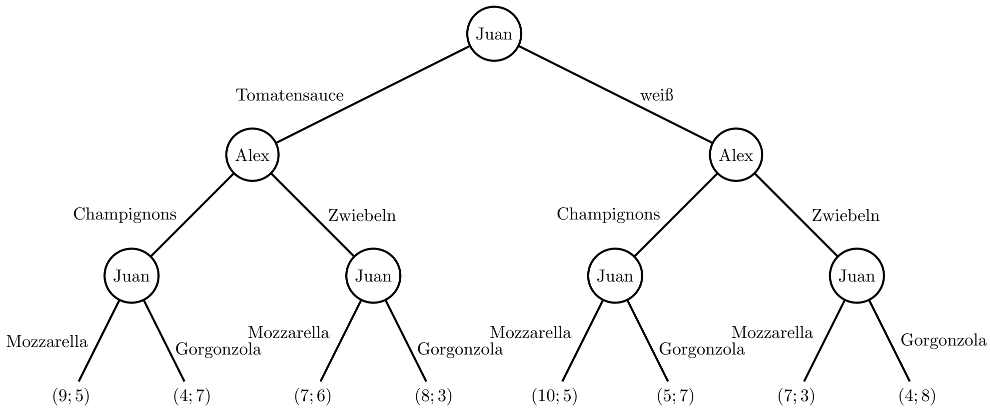
Für Spieler 2 ist die erste Spalte eine beste Reaktion, wenn $-2p+(1-p)>0+\frac{1}{2}\cdot(1-p)$. Wie zu erwarten war, weil das Spiel für beide Spieler dieselben Gewinne hat, ist das dieselbe Gleichung wie für Spieler 1. Wir sehen, dass die erste Spalte eine beste Reaktion ist, wenn $p<\frac{1}{5}$ und die zweite Spalte, wenn $p>\frac{1}{5}$. Jede Strategie ist eine beste Reaktion, wenn $p=\frac{1}{5}$.

Diese besten Reaktionen können wir wieder in einer Grafik zusammenfassen:



Wir sehen, dass die Linien nur Schnittpunkte bei $(0, 1)$, $(1, 0)$ und $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ haben. Die ersten zwei Schnittpunkte sind die reinen Nash-Gleichgewichte, die wir schon gefunden haben. Der dritte Punkt gibt ein gemischtes Nash-Gleichgewicht, nämlich die Situation, in der Spieler 1 und Spieler 2 beide die Strategie $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ spielen.

Antwort zu Aufgabe 4.3



Antwort zu Aufgabe 4.5

Im linken Kreis von Robert wird Robert I wählen. Das gibt ihm anstelle von 1 einen Gewinn von 2. Im rechten Kreis wird Robert C wählen, weil ihm das einen Gewinn von 3 anstelle von 0 gibt. Gwen weiß jetzt, dass sie, wenn sie I wählt, Robert auch I wählen wird. Dann bekommt sie einen Gewinn von 3. Wenn sie C wählt, wählt Robert auch C, was ihr einen Gewinn von 2 gibt. Das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion ist für Gwen I und für Robert auch I. Das Ergebnis hierbei ist ein Gewinn von 3 für Gwen und 2 für Robert.

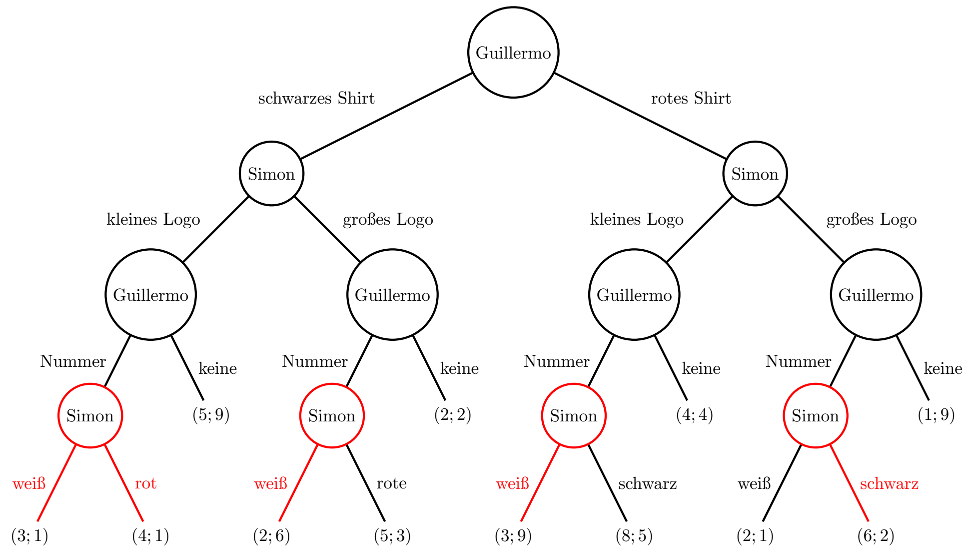
Antwort zu Aufgabe 4.6

In den untersten vier Kreisen, in denen Juan eine Entscheidung treffen muss, wählt er (in dieser Reihenfolge) „Mozzarella“ (Gewinn 9 anstelle von 4 für Juan), „Gorgonzola“, „Mozzarella“und „Mozzarella“. In den beiden Kreisen, in denen Alex eine Entscheidung trifft, sehen wir, dass er im linken Kreis „Champignons“ wählt (Gewinn 5, nachdem Juan „Mozzarella“ gewählt hat). Auch im rechten Kreis wählt er „Champignons“. Bei der ersten Wahl bringt die Entscheidung „Tomatensauce“ Juan einen Gewinn von 9, nachdem Alex „Champignons“ und er selbst „Mozzarella“ gewählt hat. Die erste Wahl „Weiße Pizza“ bringt ihm nach den Wahlen „Champignons„ und „Mozzarella“ 10 Punkte. Also bringt als erste Wahl die „weiße Pizza“ Juan den größten Gewinn.

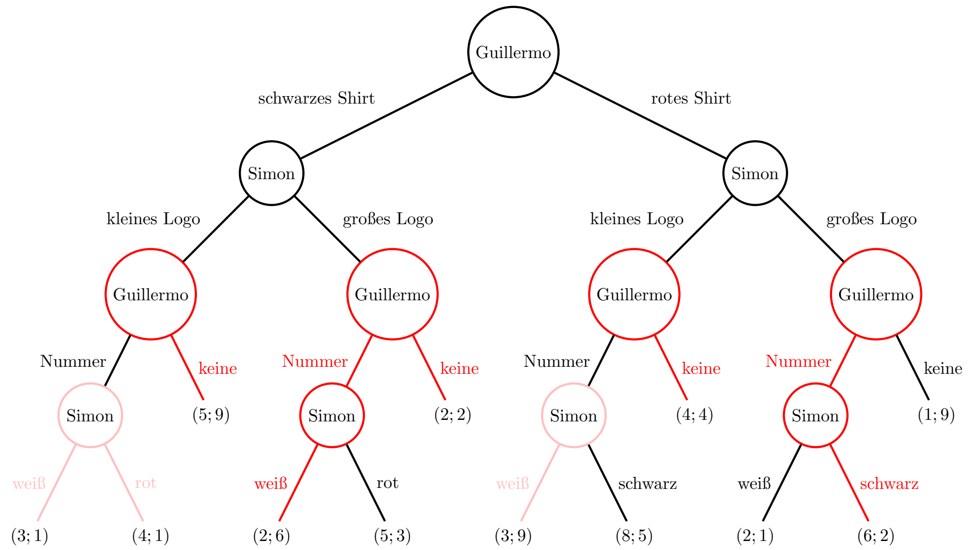
Also besteht das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion aus den Strategien „weiße Pizza, Mozzarella“ für Juan und „Champignons“ für Alex. Das Ergebnis ist ein Gewinn von 10 für Juan und 5 für Alex.

Antwort zu Aufgabe 4.7

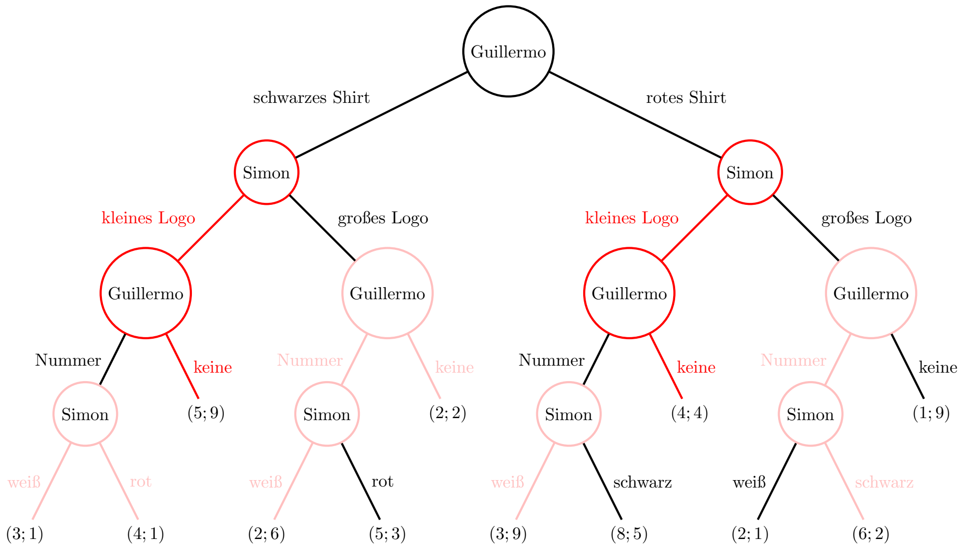
Wir beginnen, unten zu schauen, welche Entscheidungen von Simon die besten sind, und färben diese rot. Im Kreis links unten bekommt Simon bei beiden Aktionen 1. Deshalb gibt es keine Vorliebe und wir färben beide.



Wir schauen jetzt ausgehend von den vier Kreisen von Guillermo, welche Entscheidung ihm den größten Gewinn gibt, wenn wir Simons Entscheidung kennen. Wir färben diese Linien rot. Falls eine rote Linie nicht von einer früheren roten Linie ausgeht, wird diese inaktiv und wir färben sie rosa.



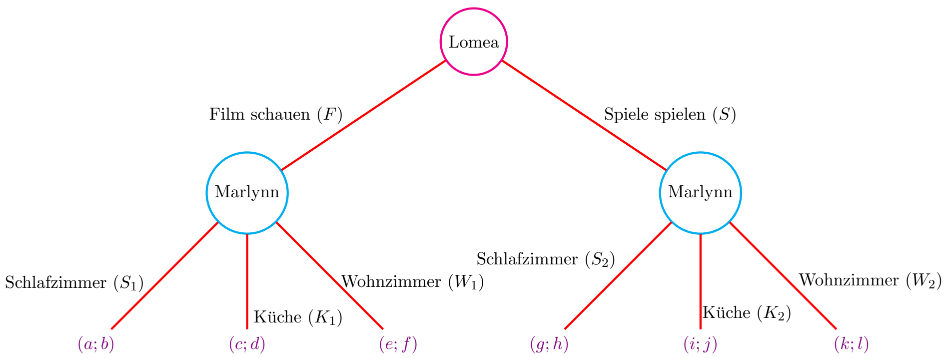
Wenn wir jetzt bei den beiden Kreisen von Simon schauen und wieder die Linien, die für Simon den höchsten Gewinn geben, rot färben, bekommen wir die folgende extensive Form:



Der letzte Kreis ist die Anfangsauswahl von Guillermo. Guillermo weiß, dass Simon ein kleines Logo wählt und er sich dann gegen eine Rückennummer entscheidet, wenn er ein schwarzes Shirt wählt. Damit gibt er dem Wettkampfshirt eine 5. Wenn er ein rotes Shirt wählt, wählt Simon wieder ein kleines Logo und er keine Rückennummer. Diesem Wettkampshirt gibt er dann eine 4. Guillermos beste Aktion ist es also, ein schwarzes Shirt zu wählen. Das Gleichgewicht der rückwärtsgerichteten Induktion ist also für Guillermo „schwarzes Shirt, keine“ und für Simon „kleines Logo“ . Das Wettkampfshirt wird schwarz mit einem kleinen Logo ohne Rückennummer.

Antwort zu Aufgabe 4.8

Wir geben den Aktionen der beiden Spieler Label wie folgt:



Lomea hat zwei mögliche Strategien. Sie wählt zwischen Film schauen und Spiele spielen. Die Matrix hat also zwei Zeilen. Marlynn hat neun verschiedene Strategien. Deshalb bekommt die Matrix neun Spalten. Marlynn kann eine Entscheidung treffen, wenn Lomea den Film wählt, aber auch, wenn Lomea Spiele spielen will. Also hat sie 3 mal 3 Optionen. Marlynns Strategien werden als Buchstabenkombinationen wiedergegeben, passend zur Möglichkeit des Film Schauens oder Spiele Spielens. Dadurch bekommen wir zum Beispiel S_1W_2; Marlynn wählt das Schlafzimmer, wenn Lomea den Film wählt, und wählt das Wohnzimmer, wenn Lomea Spiele wählt. Daraus resultiert die folgende Matrix:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccccc} S_1S_2 & S_1K_2 & S_1W_2 & K_1S_2 & K_1K_2 & K_1W_2 & W_1S_2 & W_1K_2 & W_1W_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} F \\ S \end{array} & \begin{pmatrix} a;b & a;b & a;b & c;d & c;d & c;d & e;f & e;f & e;f \\ g;h & i;j & k;l & g;h & i;j & k;l & g;h & i;j & k;l \end{pmatrix} \end{array}$$

Antwort zu Aufgabe 4.9

Damit es für Jack vernünftig ist, im ersten Schritt auf Will zu zielen, muss der erwartete Gewinn größer sein. Im Fall $p < q$ heißt das:

$$p \cdot (2(1-p) + (p+1) \cdot (1-q)) > 2p$$

Mit $p = 0$ wird die Ungleichung nicht erfüllt (beide Seiten sind gleich 0). Daher können wir $p > 0$ annehmen (p ist eine Wahrscheinlichkeit, und daher nicht negativ) und insbesondere durch p teilen, um die Ungleichung wie folgt umzuformen

$$\begin{aligned} & p \cdot (2(1-p) + (p+1) \cdot (1-q)) > 2p \\ \Leftrightarrow \quad & 2(1-p) + (p+1) \cdot (1-q) > 2 \\ \Leftrightarrow \quad & (p+1) \cdot (1-q) > 2p \\ \Leftrightarrow \quad & 1-q > \frac{2p}{p+1} \\ \Leftrightarrow \quad & q < 1 - \frac{2p}{p+1} = \frac{1-p}{p+1} \end{aligned}$$

Jetzt haben wir gefunden, dass q zwischen p und $\frac{1-p}{p+1}$ liegen muss. So ein q gibt es, wenn $p < \frac{1-p}{p+1}$. Das heißt,

$$\begin{aligned} & p < \frac{1-p}{p+1} \\ \Leftrightarrow \quad & p^2 + p < 1 - p \\ \Leftrightarrow \quad & p^2 + 2p - 1 < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (p+1)^2 - 2 < 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (p+1)^2 < 2. \end{aligned}$$

Wegen $p + 1 \geq 0$ ist die letzte Ungleichheit äquivalent zu $p + 1 < \sqrt{2}$, also $p < \sqrt{2} - 1$.

Wir suchen also Werte für p, sodass $0 < p < \sqrt{2} - 1$ ist. Für so ein p existieren dann Werte für q, die $p < q < \frac{1-p}{p+1}$ erfüllen. Für jeden dieser Werte von p und q ist die beste erste Aktion von Jack, zu probieren, Will zu treffen.